

基于 padé 近似的热弹性理论

杨建^{1,2*} 符力耘^{1,3}

1 中国科学院地球化学研究所 贵阳 550081; 2 中国科学院大学 北京 100049;

3 中国石油大学(华东) 青岛 266580

1. 引言

温度引起的岩石波速变化通常具有非线性特征,而这种非线性变化依赖于温度相关的岩石复杂变形。基于应变自由能泰勒展开,经典热弹性理论描述温度相关的波速变化,将存在波速发散和有限波速变化问题。Padé 近似是一种优于泰勒展开和连续分数近似的强有力的方法。Padé 近似由两个多项式有理函数组成,经常用在幂级数中呈现出发散函数的特征。

2. 热弹性理论

(1) 经典热弹性理论

$$\begin{cases} \rho V_p^2 = \lambda + 2\mu + \psi_1 \alpha, \\ \rho V_s^2 = \mu + \psi_2 \alpha, \end{cases}$$

其中 ρ 是密度, λ 和 μ 是拉梅常数, ψ_1 和 ψ_2 是综合三阶弹性常数, V_p 和 V_s 分别是纵波和横波波速, $\alpha = \zeta \theta$ (ζ 是热膨胀系数, θ 是相对温度)。

(1) 基于 Padé 近似热弹性理论

$$\begin{cases} \rho V_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{1 + 3a\alpha} + \left(\frac{4\lambda + 4\mu}{1 + 3a\alpha} + \frac{Y_1}{1 + 3b\alpha} \right) \alpha, \\ \rho V_s^2 = \frac{\mu}{1 + 3a\alpha} + \left(\frac{\lambda - 2\mu}{1 + 3a\alpha} + \frac{Y_2}{1 + 3b\alpha} \right) \alpha, \end{cases}$$

其中 a 和 b 是与岩石结构相关的物理量, Y_1 和 Y_2 是综合的 Padé 弹性常数。

3. 实验结果

通过研究砂岩和花岗岩分别加热到不同的温度,讨论两种理论对岩石波速预测情况。结果表明:经典热弹性理论用于砂岩实验中,在 775°C 时存在有限波速变化问题; Padé 近似热弹性理论用于砂岩和花岗岩实验中相比于经典热弹性理论,更能准确预测波速的变化;由于温度对花岗岩横波波速影响较小,即温度引起的线性弹性应变或非线性弹性应变较小,两种理论预测效果大致相同; a 和 b 物理量的变化与特定岩石结构本身相关。

4. 结论

(1) 运用到岩石(砂岩与花岗岩)实验数据说明,基于 Padé 近似热弹性理论与经典热弹性理论相比,更能准确预测温度相关的岩石波速变化,尤其是在高温条件下;

(2) Padé 近似热弹性理论预测的波速变化结果与 a 和 b 这两个岩石结构相关的物理量相关;

(3) 经典热弹性理论存在波速发散和有限波速变化问题, Padé 近似热弹性理论能够解决此类问题。

参考文献

(1) Sorokin, B. P., et al., Temperature dependence of the second-order elastic constants of cubic crystals, *Physics of Solid State*, 1999, 41(2), 208-212.

(2) Zadik, I., Universal padé approximants and their behaviour on the boundary, *Monatshefte für Mathematik*, 2017, 182(1), 173 - 193.