

分类号_____

密级_____

U D C_____

编号_____

中国科学院地球化学研究所

博士后研究工作报告

各向异性介质中的直流电场与极化场有限元模拟研究

宋滔

工作完成日期 2017年7月—2019年8月

报告提交日期 2019年8月

中国科学院地球化学研究所（贵州）

2019年8月

各向异性介质中的直流电场与极化场有限元模拟研究

Finite Element Numerical Simulation of DC and IP field with Anisotropy

博 士 后 姓 名 宋滔

流动站（一级学科）名称 中国科学院地球化学研究所地质学

专 业（二级学科）名称 矿物学、岩石学、矿床学

研究工作起始时间 2017年7月20日

研究工作期满时间 2019年8月30日

中国科学院地球化学研究所人事部（贵州）

2019年8月

声 明

本人声明所呈交的博士后出站报告是我个人和合作导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国科学院地球化学研究所或其他教育机构和科研单位的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确说明并表示了谢意。

签名： 梁 滔 日期： 2019 年 8 月 19 日

关于博士后出站报告使用授权说明

本人完全了解中国科学院地球化学研究所有关保留、使用博士后出站报告的规定，即中国科学院地球化学研究所有权保留送交博士后出站报告的复印件，允许博士后研究报告被查阅和借阅；中国科学院地球化学研究所可以公布博士后研究报告的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究报告。

公开 保密 (____ 年) (保密的论文在解密后应遵守此规定)

博士后签名： 梁 滔

合作导师签名： 王 赞

日期： 2019 年 8 月 19 日

摘要

基于电性各向同性介质假设的直流电阻率法和时间域激发极化法在矿产资源勘查、浅地表工程勘探等领域得到了广泛应用,并取得了显著效果。由于各种宏观和微观因素的影响,地下介质的电性各向异性客观存在。已有的研究已经表明在电法资料解释与反演中忽略电性各向异性的影响可能会带来较大的偏差,甚至得到错误的结果。基于此,本报告主要的研究内容将围绕电性各向异性介质中的直流电阻率法和时间域激发极化法的正演问题,对电性各向异性介质条件下的电场响应特点进行研究。

本报告首先给出基于二次场的 2.5 维和三维各向异性介质直流电阻率法的边值和变分问题,在对 2.5 维直流电阻率法的研究中,通过简化欧拉角的方式实现了有限单元法对点源二次场的模拟,在网格剖分时,引入二维和三维非结构网格,充分发挥有限单元法的优势。通过对多个二维含各向异性异常体模型的模拟,发现直流电阻率法对电阻率的横向异常反映较为灵敏,而对纵向电阻率异常的响应相对较弱,并且不同观测装置对横、纵向电阻率异常的响应幅度也不同。然后本报告给出了二维各向异性介质电流密度的计算方式,并通过对总场和二次场电流密度的分析,解释了直流电阻率法对横、纵向电阻率异常响应的不同。

为了研究极化率的各向异性特点,本报告首先通过对极化率各向同性薄互层的研究,给出对应各向异性属性的计算公式,证明了宏观极化率各向异性的存在并结合对点源场的求解,实现了对各向异性介质时间域激发极化法的有限单元法正演模拟。进一步本报告从各向异性介质的点源场出发证明了直流电阻率法和时间域激发极化法中的各向异性反常现象,并通过数值模拟进行了验证,并从数值模拟的角度分析了负视极化率现象产生的原因。

关键词：直流电阻率法, 激发极化法, 各向异性反常, 有限单元法

ABSTRACT

Based on isotropic hypothesis, the forward modeling and inversion of Direct Current(DC) resistivity sounding and Time-domain induced polarization(TDIP) are relatively mature and has been widely used and achieved remarkable results in mineral exploration, engineering geology and hydrological environment. Due to the influence of various macroscopic and microscopic factors, the underground medium is anisotropic, and previous researches have indicated that, if the influence of anisotropy is ignored in the interpretation and inversion of the field data, it may cause large error and even obtain wrong results. Therefore, this report focus on the problem of DC and TDIP forward modeling in anisotropic medium, and their corresponding response.

First, this report deduced the variational problem of for 2.5D and 3-D point source using secondary field method. In the process of point source forward modelling in 2.5D anisotropic medium, the Euler angles is simplified while calculating the primary potential so that the Fourier transform of the background potential with the dip angle can be avoided, since it is mathematically difficult. Also, the unstructured grid in 2D and 3D was introduced to give full play of the advantages of finit element method(FEM).

Then several models of 2-dimensional anisotropic anomalous body were simulated. It was found that the longitudinal resistivity has more effect on the apparent resistivity than transverse resistivity in collinear arrays, such as the pole-pole, dipole-dipole and Wenner arrays. Through simulation of current density and anomalous current density of several arrays, it can be concluded that the causes of different responses for the longitudinal and transverse resistivity with respect to each array is the distribution of current density around the subsurface. Also, it shows that the sensitivity of each array type to the variations in longitudinal and transverse resistivity can be understood with the perspective of current density.

To study the characteristics of chargeability in anisotropic medium, first this report discusses the equivalence between thin interbed with isotropic chargeability and the anisotropic chargeability medium. After the formula was given to calculate the attribute in anisotropic chargeability, the forward modelling algorithm of TDIP in anisotropic medium was presented. Based on the analytical solution for direct current point source in an anisotropic half-space, the apparent resistivity and apparent chargeability of a transversely isotropic media is calculated with the symmetry axis vertically and horizontally respectively. And then a simple proof of paradox of anisotropy in resistivity sounding and TDIP is given. In the meanwhile, the fomulation of the mean chargeability is given. Through numerical simulation of the apparent resistivity and apparent chargeability for a tilted transversely isotropic media with different angles, the paradox of anisotropy in resistivity and TDIP is analyzed, the phenomenon of negative apparent chargeability is interpreted.

Key Wrods: Direct Current resistivity sounding, Time-domain induced polarization, paradox of anisotropy, finite element method

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	VI
图表目录	VIII
第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	1
1.2.1 直流电阻率法	1
1.2.2 时间域激发极化法	2
1.3 主要研究内容	4
1.3.1 非结构网格 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟	4
1.3.2 各向异性介质中横、纵向电阻率对观测的影响	4
1.3.3 时间域激发极化法中电性各向异性介质的特点以及模拟技术	4
第 2 章 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟	7
2.1 电阻率各向异性	7
2.2 2.5 维直流电阻率法各向异性介质数值模拟	8
2.2.1 二维电性各向异性介质	9
2.2.2 二次场对应变分问题	9
2.2.3 有限单元法求解	11
2.2.4 算例分析	18
2.3 三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟	18
2.3.1 点源三维各向异性介质电场的变分问题	19
2.3.2 有限单元法求解	21
2.3.3 算例分析	26
2.4 小结	27
第 3 章 各向异性介质中横、纵向电阻率对观测的影响	29
3.1 横、纵向电阻率对观测的影响	29
3.1.1 低阻异常体	29
3.1.2 高阻异常体	34
3.2 电流密度分析	37
3.2.1 电流密度的计算	37
3.2.2 点电流源	40
3.2.3 对称四极装置	43
3.2.4 偶极源	46
3.3 小结	48
第 4 章 时间域激发极化法中电性各向异性介质的特点	51

4.1 极化率宏观各向异性	51
4.1.1 薄互层介质电阻率宏观各向异性	51
4.1.2 薄互层介质极化率宏观各向异性	52
4.2 激发极化法各向异性反常现象的证明	54
4.2.1 点源场各向异性介质均匀半空间解析解	55
4.2.2 直流电阻率法中的各向异性反常现象	56
4.2.3 时间域激发极化法中的各向异性反常现象	57
4.3 时间域激发极化法数值模拟	59
4.4 时间域激发极化法正演模拟分析	59
4.4.1 均半空间模型	59
4.4.2 两层各向异性模型	63
4.4.3 含异常体二维模型	66
4.4.4 含异常体三维模型	68
4.4.5 极化率负值的分析	71
4.5 小结	75
第 5 章 结论和展望	77
参考文献	79
附录 A 点源 2.5 维各向异性介质变分问题	87
附录 B 三维两层模型 GMSH 代码	90
致 谢	93
作者简介及发表论文情况	94

图表目录

表 2.1 7 点波数.....	17
表 2.2 数值解与解析解对比.....	18
图 2.1 各向异性介质坐标旋转示意.....	8
图 2.2 二维各向异性示意.....	9
图 2.3 点源示意.....	10
图 2.4 二维非结构网格剖分示意.....	12
图 2.5 三角单元.....	12
图 2.6 模型 1 两层含 VTI 介质模型.....	18
图 2.7 三维点源示意.....	19
图 2.8 结构网格区域剖分.....	21
图 2.9 Gmsh 网格示意.....	22
图 2.10 四面体单元示意.....	22
图 2.11 含方位角的两层各向异性介质.....	26
图 2.12 层状介质剖分网格示意.....	26
图 2.13 含方位角的两层各向异性介质模拟结果.....	27
图 3.1 含异常体模型.....	29
图 3.2 含低阻异常体模型极距为 3m、7m、11m 和 21m 模拟结果曲线图.....	30
图 3.3 低阻异常体对称四极装置视电阻率剖面.....	31
图 3.4 低阻异常体二极装置视电阻率剖面.....	32
图 3.5 低阻异常体偶极偶极装置视电阻率剖面.....	33
图 3.6 含高阻异常体模型极距为 3m、7m、11m 和 21m 模拟结果曲线图.....	34
图 3.7 高阻异常体对称四极装置视电阻率剖面.....	35
图 3.8 高阻异常体二极装置视电阻率剖面.....	36
图 3.9 高阻异常体偶极偶极装置视电阻率剖面.....	37
图 3.10 在矩形单元中计算电场示意.....	39
图 3.11 研究区域和稀疏网格.....	40

图 3.12 区域网格剖分.....	40
图 3.13 均匀半空间点源场电流密度分布.....	41
图 3.14 模型 MD-10 点源电流密度分布.....	41
图 3.15 模型 MD-10 点源二次场电流密度分布.....	42
图 3.16 模型 MD-10-100 点源电流密度分布	42
图 3.17 模型 MD-100-10 点源电流密度分布	42
图 3.18 模型 MD-10-100 点源二次场电流密度分布	43
图 3.19 模型 MD-100-10 点源二次场电流密度分布	43
图 3.20 对称四极装置均匀半空间电流密度分布.....	44
图 3.21 对称四极装置三个不同模型的电流密度分布.....	44
图 3.22 对称四极装置三个不同模型的二次场电流密度分布.....	45
图 3.23 均匀半空间偶极源电流密度分布.....	46
图 3.24 偶极源三个不同模型的电流密度分布.....	47
图 3.25 偶极源三个不同模型二次场电流密度分布.....	47
图 3.26 偶极偶极装置示意.....	48
图 4.1 薄互层介质电阻率示意.....	51
图 4.2 薄互层介质极化率示意.....	53
图 4.3 电极分布示意图.....	60
图 4.4 视电阻率模拟结果.....	61
图 4.5 视极化率模拟结果.....	62
图 4.6 平均电阻率与水平和垂直电阻率之间的关系.....	63
图 4.7 平均电阻率与水平和垂直极化率之间的关系.....	63
图 4.8 两层模型.....	64
图 4.9 沿 x 和 y 方向测量的视电阻率曲线.....	65
图 4.10 沿 x 和 y 方向测量的视极化率曲线.....	66
图 4.11 二维构造示意.....	67
图 4.12 视极化率和视电阻率模拟结果.....	67
图 4.13 $x=20$ 视极化率曲线	68
图 4.14 $AB=10$ 视极化率曲线.....	68

图 4.15 三维含立方体模型.....	69
图 4.16 不同角度极化率模拟结果.....	70
图 4.17 不同极距模拟结果对比.....	71
图 4.18 两层模型.....	72
图 4.19 沿 x 和 y 方向测量的视极化率曲线对比.....	73
图 4.20 y 方向上是否考虑极化效应的正演结果曲线对比.....	74
图 4.21 H 型地电模型.....	74
图 4.22 TE 模式视电阻率和相位.....	75

第1章 引言

1.1 研究背景

直流电阻率法和激发极化法是以岩、矿石的电阻率和激发极化效应差异为物质基础，通过观测与研究人工建立电场的分布规律来解决地质问题的物探方法^[1,2]。经过不断的发展与研究，直流电法和激发极化法已经在矿产、油气资源勘探和工程等领域取得了广泛应用^[3-5]，特别在水文监测和矿产等领域^[6,7]，激发极化法结合直流电阻率法的应用效果非常显著；直流电阻率法和激发极化法也被研究并应用到了超前预报中^[8-15]。

在传统的地球物理数据解释与数值模拟技术中，考虑地球介质的属性为各向同性，但在自然界中，地球介质的属性往往表现为各向异性，这一特点通过岩石物性测量已经得到充分证实，并且已被国际地球物理学界所接受，基于各向异性介质的研究是当前以及今后长时间需要关注的^[16]。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 直流电阻率法

直流电阻率法各向同性介质的正反演技术已经比较成熟^[17-24]，并且在工程、找矿等领域有了广泛应用。随着数值模拟技术的发展，研究的热点聚焦到了更符合实际情况的连续介质和各向异性介质。

对连续介质的研究，徐世浙^[25]使用有限单元法矩形单元剖分，阮百尧等^[26]使用三角单元剖分，实现了对连续介质的数值模拟，取得较高精度，刘云等^[27]在阮百尧的基础上，使用矩形内剖分四个三角形的剖分方式实现了对连续介质、复杂地形以及复杂模型的数值模拟。

徐世浙和赵生凯^[28]使用有限单元法对二维各向异性的直流电阻率法进行了模拟，Zhou et al. ^[29]使用高斯正交网格(Gaussian quadrature grids)实现了对2.5D复杂各向异性介质的数值模拟，取得较好的精度。由于三维正演所需时间较长，并且三维各向异性参数太多，导致基于三维各向异性正演的反演研究工作进展缓

慢,所以研究直流电阻率法 2.5 维的正反演方法成为探索各向异性反演工作的桥梁。在前人的研究中,2.5 维正演工作均是基于总场法进行的,因为异常场法需要求解一次场,而电性各向异性介质点源傅氏空间中的解析解较难求,宋滔^[30]采用简化傅里叶变换中的欧拉角实现了对点源二维各向异性介质二次场的模拟,并讨论了横、纵向电阻率异常的影响,但在其模拟中采用的是结构网格,并且没有对横、纵向电阻率异常如何影响观测进行进一步的分析。

前人学者对直流电阻率法各向异性介质的研究已经有了很多成果。Yin^[31-33]等人研究了一维层状任意各向异性介质的电磁响应特点,并对一维反演进行了研究,通过理论分析和数值模拟研究,得出了在数据充分并且准确的情况下,一维反演依然具有不可避免的多解性。Li and Spitzer^[34]使用有限单元法六面体剖分实现了对三维直流电阻率法各向异性介质的模拟,Zhou et al.^[29]使用高斯正交网格,实现了对三维任意各向异性介质的正演模拟并对地形响应进行了模拟研究,同时异常场法^[35,36]和网格生成技术^[17,21,37,38]也被引入到了各向异性介质的模拟中^[37,39],对模型和地形的描述更加准确容易,也有效提高了模拟的精度。在对直流电阻率法各向异性介质的研究中,各向异性反常现象(anisotropy paradox)是非常重要的一个现象,这个现象已经在许多数值模拟结果中被提到和证实,但是少有关于反常现象的数学证明。Lüling^[40]从各向异性介质的库伦定律出发,给出了一个简单的证明,解释了在测井和地面测量中的这个反常现象。

1.2.2 时间域激发极化法

现阶段对于激发极化法数据的解释主要基于地球介质为极化率各向同性的假设^[14,41],随着激发极化法在各个领域越来越多的应用,生产中对其资料解释的精度要求越来越高,也期望通过对激发极化法数据的解读获取更多的信息,所以传统的基于电性各向同性假设的反演解释手段越来越不能满足资料解释反演的需求。

对电阻率各向异性的研究已经表明,在反演解释中考虑介质的电性各向异性,不仅能提高反演的精度和准确性^[42-44],而且通过对各向异性参数的预测能够获取更多的与介质电性有关的岩性、结构等信息^[45,46]。并且已有的研究表明,使用各向同性的方法反演极化率各向异性数据,尽管数据能够吻合得较好,但是得到的

反演结果与实际的地电模型相差较远^[47,48]。所以研究基于极化率各向异性介质的高精度正演方法,对分析其响应特点、资料解释,以及后续向异性反演的研究都至关重要。

许多现代的电法仪器能够同时观测直流电阻率的数据和时间域激发极化的数据^[49],并且点源直流电场的模拟是研究激发极化场模拟的基础^[50,51]。基于各向同性介质的激发极化法^[50,52,53]的正演模拟和反演已经较为成熟,但对激发极化法各向异性模拟方面的研究却较少。

Zhdanov^[54]基于多相与混合介质在波恩近似下的等效电阻率模型、混合介质激发极化理论及电磁感应理论,提出了等效介质激电模型^[55],并且将其扩展到各向异性介质中^[56]。Kenkel et al.^[47]首次推导了两个复电阻率各向同性的薄层近似为各向异性地层的复电阻率表达式,然后对二维各向异性介质的频率域激发极化法进行了模拟,并通过分析指出如果忽略复电阻率各向异性会给解释带来困难,在其文章中尚未对时间域激发极化法的各向异性进行讨论,之后 Kenkel and Kemna^[57]分析了频率域激发极化法对二维各向异性介质的勘探灵敏度。Liu et al.^[48]使用有限体积法实现了对三维各向异性介质的时间域激发极化法模拟,但是有限体积法难以实现对复杂模型的模拟,同时在其文章中仅对主轴各向异性介质进行了模拟,然而实际介质是任意各向异性的,并且各向异性倾角会对观测数据造成巨大的影响^[34]。Liu et al.^[48]在其模拟研究中发现了各向异性介质时间域激发极化法与各向异性介质电阻率法中非常相似的现象---“各向异性反常”现象。在Liu et al.^[48]的研究中,他们给出了一个简单极化率各向异性模型的模拟结果,并根据模拟结果推测了“平均极化率”的值,遗憾的是他们并没有给出具体的推导,以及对极化率“各向异性反常”现象进一步的分析研究。

在时间域激发极化法观测中,视极化率为负的现象也引起了科研工作者的注意^[51,58],在实际资料处理中一般将其当作畸变点作剔除处理^[59],但在一定的地电结构下视极化率是可能为负的。Sumner^[60]指出浅部的极化体可能导致视极化率的负值,傅良魁和姚文斌^[58]通过等效电阻率法对层状介质进行了分析,对激电负效应给出直观的物理解释,并且通过土槽实验验证了文中结论,Dahlin and Loke^[49]通过数值模拟研究了多种装置的灵敏度分布,通过 Seigel 定律^[61]解释了

负视极化率出现的现象,并且实测数据也验证了该现象,在他们的研究中通过对实测数据的反演,表明如果去掉视极化率数据中的负值,反演结果的深部分辨率将会大大降低,并且可能会引入假异常。最近孙仁斌等^[59]通过水槽实验也验证了视极化率负值的存在,并且提出通过二次场衰减特征甄别负值是否可用。但是他们的研究均没有对各向异性介质视极化率的负值现象进行讨论,而实际介质往往是各向异性的。

综上所述,要提高时间域激发极化法资料的解释水平和反演精度,研究更符合实际介质的三维任意极化率各向异性介质的模拟是十分必要的,同时对“各向异性反常”现象以及各向异性介质中视极化率的负值现象进行模拟分析,对极化率各向异性勘探的理论研究和数据的解释均具有重要意义。

1.3 主要研究内容

基于以上分析,本报告的主要研究内容有以下三个方面。

1.3.1 非结构网格 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟

非结构网格已经广泛应用于地球物理电法、电磁法的正演中,并且取得了较好的应用效果,本报告在前人已有研究基础上,基于非结构网格实现对点源场 2.5 维、三维各向异性介质的有限单元法模拟,重点研究各向异性介质中的二次场法。

1.3.2 各向异性介质中横、纵向电阻率对观测的影响

前人对直流电阻率法各向异性介质的研究主要集中在数值模拟技术,通过数值模拟研究各向异性介质的响应进而研究反演算法,但少有学者对不同直流电阻率法装置探测电性各向异性属性的能力和特点进行研究。本报告首先通过正演模拟研究不同装置下电性各向异性介质中横、纵向电阻率响应的特点并总结其规律,然后通过计算和绘制总场和二次场电流密度分布,分析不同装置下横、纵向电阻率响应灵敏度不同的原因。

1.3.3 时间域激发极化法中电性各向异性介质的特点以及模拟技术

前人学者在对各向异性介质时间域激发极化法的研究中,直接假设了极化率

各向异性的存在,由于缺少对极化率各向异性的理论研究以及实验室相关物性测量方面的数据使得对时间域激发极化法各向异性的模拟缺少了关键的物性支持。本报告通过对薄互层介质的研究,分别从横向和纵向对电流进行分析,结合极化率的定义给出极化率各向同性薄互层介质的宏观各向异性属性,从理论上证明宏观极化率各向异性的存在。

在对各向异性介质直流电阻率法以及时间域激发极化法的研究中“各向异性反常”现象已经被许多学者模拟研究,本报告从电场基本公式出发,给出地面电法中“各向异性反常”的证明,然后证明极化率各向异性介质中也存在类似现象,并且类比平均电阻率的定义,给出横向各向同性介质的平均极化率表达式。

以三维直流电阻率法各向异性介质模拟为基础,实现对时间域激发极化法三维各向异性介质的模拟。通过模拟验证极化率中的“各向异性反常”现象,同时研究各向异性介质的响应特点。在模拟中研究各向异性介质中的视极化率负值现象,并通过对极化率中一次场和总场的分析,探讨视极化率出现负值的原因。

第2章 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟

本章主要研究基于二次场法的 2.5 维和三维直流电阻率法各向异性介质的有限单元法数值模拟技术。

2.1 电阻率各向异性

在电性各向同性的假设中,介质的电阻率与测量的方向无关,即假设每个方向测量得到的电阻率值相同。介质的电性各向异性指的是介质的电阻率与测量的方向有关,并且一般假设介质中任一点都存在彼此正交的三个电性主轴,三个主轴方向的电阻率分别为 ρ_x, ρ_y, ρ_z 。导致介质各向异性的因素主要分为两类:微观各向异性,如矿物、晶体在不同方向上发育特征不一样,介质具有层理结构等造成的各向异性;宏观各向异性,如裂隙的定向发育或者不同薄层的叠加等。微观各向异性和宏观各向异性与观测的尺度有关,并没有严格的界限。在勘探地球物理中,一般以宏观各向异性为研究对象。

当介质为各向异性时电阻率需要使用张量来表达,目前使用比较广泛的又两种定义方式^[32,62],二者皆是从观测坐标系通过三次坐标旋转来得到各向异性主轴坐标系,不同的是每次选择的旋转轴不一样;二者虽然有所不同,但是目的都是一样,即利用三个主轴电阻率通过三次旋转,最终可以得到任意方位的主轴各向异性坐标系。在本文的研究中采用 Yin^[32]介绍的方法。

如图 2.1 所示为各向异性介质坐标旋转的示意^[32]。

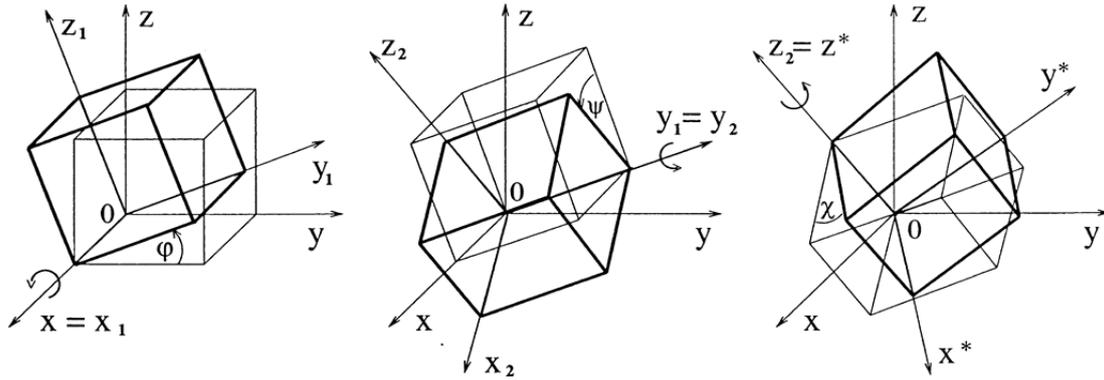


图 2.1 各向异性介质坐标旋转示意

Fig 2.1 Transformation of coordinate systems in anisotropic medium

观测坐标系为 (x, y, z) ，介质电性主轴所在坐标系（一般又称为自然坐标系）为 (x^*, y^*, z^*) 。图中角 φ 、 ψ 和 χ 是介质电性主轴所在坐标系分别绕观测坐标系的 x 、 y 和 z 轴旋转的角度，一般称为欧拉角，所以介质的各向异性可以用 6 个参数来表达，分别是三个主轴电阻率 ρ_x, ρ_y, ρ_z 以及三个欧拉角 φ 、 ψ 和 χ 。此时电阻率可以表达为张量形式，如式 2.1 所示。

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{D}\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad 2.1$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_0 = \text{diag}(\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ ， \mathbf{D} 为旋转矩阵，如式 2.2 所示。

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\chi\cos\psi & -\sin\chi\cos\psi & \sin\psi \\ \sin\chi\cos\varphi + \cos\chi\sin\psi\sin\varphi & \cos\chi\cos\varphi - \sin\chi\sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi \\ \sin\chi\sin\varphi - \cos\chi\sin\psi\cos\varphi & \cos\chi\sin\varphi + \sin\chi\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\cos\varphi \end{pmatrix} \quad 2.2$$

当介质电性主轴方向与观测坐标系一致，即 $\varphi = \psi = \chi = 0^\circ$ ，那么有 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 = \text{diag}(\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ ；如果进一步的三个主轴方向的电阻率一致，此时即为各向同性介质；所以电性各向同性介质只是电性各向异性介质的特例，各向异性介质为更一般的对介质的描述。

2.2 2.5 维直流电阻率法各向异性介质数值模拟

关于直流电阻率法 2.5 维各向异性介质总场的模拟技术已经有很多研究成果

[29,63-65] , 在此本文主要讨论基于二次场的模拟技术。

2.2.1 二维电性各向异性介质

选取如图 2.2 所示的观测坐标系 z 方向为垂直方向, x, y 方向为水平方向, 假设介质构造为 x 方向, 即沿 x 方向介质没有变化, 假设介质电性主轴的平面 $x'y'$ 与坐标轴 xy 平面的夹角为 α , 此时电阻率张量表达式 2.1 中旋转矩阵 \mathbf{D} 为:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad 2.3$$

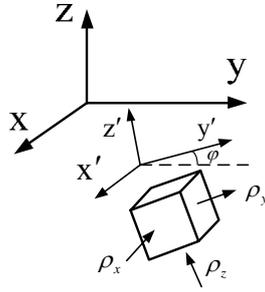


图 2.2 二维各向异性示意

Fig 2.2 Anisotropic medium in 2-dimension

经过计算简化得到介质电导率为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_0\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi & \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\varphi \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\varphi & \sigma_y \sin^2 \varphi + \sigma_z \cos^2 \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 0 & \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \quad 2.4$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为电导率张量, $\boldsymbol{\sigma}_0 = \text{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, $\sigma_x = 1/\rho_x$, $\sigma_y = 1/\rho_y$, $\sigma_z = 1/\rho_z$, 并记

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \quad 2.5$$

2.2.2 二次场对应变分问题

在地表 A 点处供入电流 I , 如图 2.3 所示。

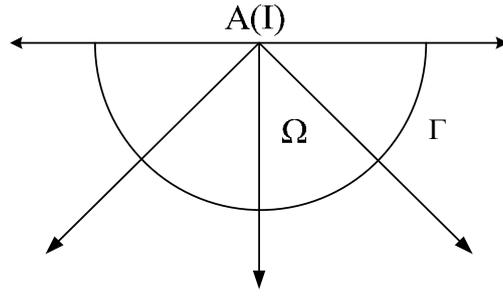


图 2.3 点源示意

Fig 2.3 Point source

电流密度 \mathbf{j} 满足的方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 2I\delta(A) \quad 2.6$$

其中 $\delta(A)$ 为冲击函数，如式 2.7 所示：

$$\int_{\Omega} \delta(A) d\Omega = \begin{cases} 0 & A \notin \Omega \\ 1/2 & A \in \Gamma \end{cases} \quad 2.7$$

因为电位 u 与电流密度的关系为：

$$\mathbf{j} = -\boldsymbol{\sigma} \nabla u \quad 2.8$$

与各向同性介质不同，此处 $\boldsymbol{\sigma}$ 为介质的电导率张量。将 2.8 式代入 2.6 式，得到电位满足的微分方程为：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = -2I\delta(A) \quad 2.9$$

因为介质在 x 方向上没有变化，通过傅里叶变换，然后引入二维哈密顿算子：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad 2.10$$

可以得到二维构造下，傅氏空间中电位 U 满足的微分方程为式 2.11。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) - k^2 \sigma_y U = -I\delta(A) \quad 2.11$$

其中 k 为空间系数，通过推导，电位 U 满足的边值问题如式 2.12 所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) - k^2 \sigma_y U = -I \delta(A) \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \in \Gamma_s \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -k \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U \in \Gamma_\infty \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -k \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{\lambda z}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U \in \Gamma_\infty \end{array} \right. \quad 2.12$$

其中其中 K_0 和 K_1 分别为第二类零阶和一阶修正贝塞尔函数, $\lambda = \sigma_y / \sigma_z$ 。

使用加权余量法得到对应的变分问题如式 2.13 所示 (附录 A)。

$$\left\{ \begin{array}{l} F(U) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) + \frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 - I \delta(A) U \right] d\Omega \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\infty} k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U^2 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \end{array} \right. \quad 2.13$$

当使用总场法求解时因为有限元难以模拟源的奇异性,所以在源附近的模拟结果误差较大,为了消除源的影响,在表达式中将总场分为一次场 U_0 和二次场 U , 由于一次场一般情况下存在解析解,这就使得求解精度大大提高^[35,36]。

与总场法类似,给出异常场满足的变分问题如式 2.14 所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} F(U) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) + \frac{1}{2} k^2 \sigma_x U^2 + \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U_0) + k^2 \sigma_y' U U_0 \right] d\Omega \\ \quad + \int_{\Gamma_\infty} \frac{1}{2} k \sigma_y \beta U^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} k \sigma_y' \beta U U_0 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \\ \beta = \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} \end{array} \right. \quad 2.14$$

其中 $\sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_y'$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}'$, σ_{y0} 和 $\boldsymbol{\tau}_0$ 为背景电导率和背景电导率张量, σ_y' 和 $\boldsymbol{\tau}'$ 为异常电导率。

2.2.3 有限单元法求解

下面介绍使用有限单元法求解式 2.14 所示的变分问题。

2.2.3.1 网格剖分

本报告采用开源软件 Gmsh^[66]进行非结构网格的剖分，如图 2.4 所示。

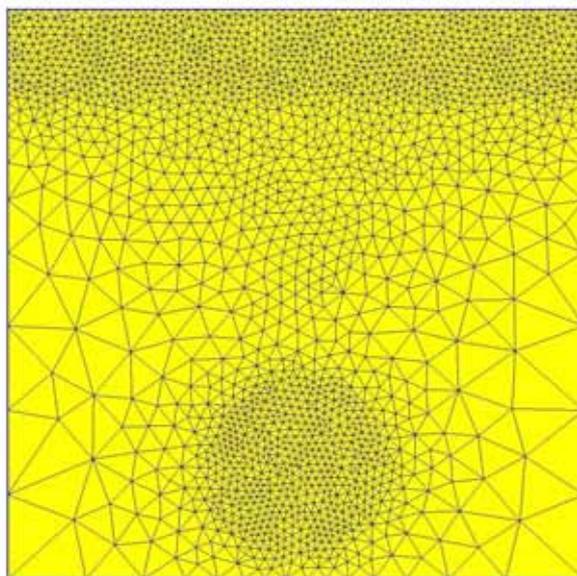


图 2.4 二维非结构网格剖分示意

Fig 2.4 the unstructured grids in 2-dimension

采用非结构网格可以在任意想要加密的区域进行网格加密，充分发挥有限单元法的优势，剖分的单元为三角网格。

2.2.3.2 单元分析

在研究区域的三角形如图 2.5 所示。

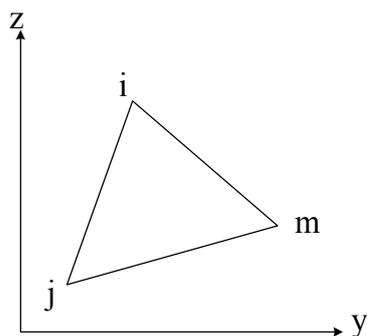


图 2.5 三角单元

Fig 2.5 Triangle element

在三角单元内，假设电位是线性变化的，在单元内任意位置的电位 u 可以通过形函数和三角形三个节点的电位表示，如式 2.15 所示。

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m = \mathbf{N}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{N} \quad 2.15$$

其中 $\mathbf{N}^T = (N_i, N_j, N_m)$ 为形函数， $\mathbf{u}^T = (u_i, u_j, u_m)$ 为三角形节点的电位。

形函数为： $N_n = \frac{1}{2\Delta}(a_n x + b_n y + c_n)$ $n = i, j, m$ ，其中 Δ 为三角形的面积，且有：

$$\begin{cases} a_i = y_j - y_m, b_i = x_m - x_j \\ a_j = y_m - y_i, b_j = x_i - x_m \\ a_m = y_i - y_j, b_m = x_j - x_i \\ \Delta = \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i) \end{cases}$$

在整个区域中将式 2.14 中的积分进行离散，表示成所有单元的线性组合如式 2.16 所示。

$$\begin{aligned} F(U) = & \sum_{\Omega} \int_e \left[\frac{1}{2} (\nabla U) \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \right] d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e \left[\frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 \right] d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} [k \sigma_y \beta U^2] d\Gamma \\ & + \sum_{\Omega} \int_e [(\nabla U) \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U_0)] d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e [k^2 \sigma'_y U U_0] d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e [k \sigma'_y \beta U U_0] d\Gamma \end{aligned} \quad 2.16$$

式 2.16 中的积分项依次记为积分 1、2、3、4、5 和 6，对比发现积分项 1 和 4，积分项 2 和 6，积分项 3 和 6 非常类似，区别为积分项 4、5、6 中包含一次场 U_0 。

单元分析 1

式 2.16 中积分项 1，因为哈密顿算子具有矢量性，可以记为 $\nabla^T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ，

积分项 $\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U)$ 中的乘积可以记 $\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) = (\nabla U)^T \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U)$ 所以有：

$$(\nabla U)^T \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) = (\nabla \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e)^T \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e) = \mathbf{u}^T (\mathbf{N} \nabla^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{N}^T) \mathbf{u}_e \quad 2.17$$

将 $\nabla \mathbf{N}^T$ 展开得到：

$$\nabla \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot (N_i \quad N_j \quad N_m) = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \mathbf{E} \quad 2.18$$

其中矩阵 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{bmatrix}$ ，因为 $\nabla \mathbf{N}^T = (\mathbf{N} \nabla^T)^T$ ，将其代入上式 2.18 得到：

$$(\nabla U)^T \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) = \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{u}_e^T (\mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E}) \mathbf{u}_e \quad 2.19$$

将 2.19 代入单元积分中可得：

$$\int_e [\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U)] d\Omega = \int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} \mathbf{u}_e d\Omega = \mathbf{u}_e^T \left(\int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} d\Omega \right) \mathbf{u}_e \quad 2.20$$

在三角形单元中，面积（ Δ ）、矩阵 \mathbf{E} 以及张量 $\boldsymbol{\tau}$ 均为常数，所以式 2.20 中的积分项为：

$$\int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} d\Omega = \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} \int_e d\Omega = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E} \quad 2.21$$

即单元积分 1 为：

$$\int_e \frac{1}{2} [\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U)] d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{1e} \mathbf{u}_e \quad 2.22$$

其中 $\mathbf{K}_{1e} = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{E}$ 。

通过矩阵运算，得到单元矩阵（为对称矩阵）的每一项分别为：

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{4\Delta} (a_i^2 \tau_{11} + b_i^2 \tau_{22} + 2a_i b_i \tau_{12}) & k_{21} &= \frac{1}{4\Delta} (a_i a_j \tau_{11} + b_i b_j \tau_{22} + (a_i b_j + a_j b_i) \tau_{12}) \\ k_{22} &= \frac{1}{4\Delta} (a_j^2 \tau_{11} + b_j^2 \tau_{22} + 2a_j b_j \tau_{12}) & k_{31} &= \frac{1}{4\Delta} (a_i a_m \tau_{11} + b_i b_m \tau_{22} + (a_i b_m + a_m b_i) \tau_{12}) \\ k_{32} &= \frac{1}{4\Delta} (a_j a_m \tau_{11} + b_j b_m \tau_{22} + (a_j b_m + a_m b_j) \tau_{12}) \\ k_{33} &= \frac{1}{4\Delta} (a_m^2 \tau_{11} + b_m^2 \tau_{22} + 2a_m b_m \tau_{12}) \end{aligned}$$

对于类似的积分项 4，

可以写为：

$$(\nabla U)^T \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U) = \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{u}_e^T (\mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E}) \mathbf{u}_{0e} \quad 2.23$$

其中 \mathbf{u}_{0e} 为在节点处的一次场向量。将其代入单元积分 4 中得到：

$$\int_e [\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U_0)] d\Omega = \int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E} \mathbf{u}_{0e} d\Omega = \mathbf{u}_e^T \left(\int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E} d\Omega \right) \mathbf{u}_{0e} \quad 2.24$$

同样在三角单元中面积（ Δ ），矩阵 \mathbf{E} 以及张量 $\boldsymbol{\tau}'$ 均为常数，所以式 2.24 中的积分项为：

$$\int_e \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E} d\Omega = \frac{1}{4\Delta^2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E} \int_e d\Omega = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E} \quad 2.25$$

得到单元积分 4 为：

$$\int_e \frac{1}{2} [\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau}' \nabla U)] d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{1e} \mathbf{u}_{0e} \quad 2.26$$

其中 $\mathbf{K}'_{1e} = \frac{1}{4\Delta} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\tau}' \mathbf{E}$ 。

单元分析 2

对式 2.16 中积分项 2：

$$\int_e \left[\frac{1}{2} k^2 \sigma_y U^2 \right] d\Omega = \frac{1}{2} k^2 \sigma_y \mathbf{u}_e^T \int_e \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{2e} \mathbf{u}_e \quad 2.27$$

已知面积分 $\int_e N_i^a N_j^b N_m^c d\Omega = 2\Delta \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}$ ，其中 a, b, c 为非负整数，

$$\text{易推知，} \mathbf{K}_{2e} = \frac{\sigma_y k^2 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}。$$

类似的，对式 2.16 中积分项 5：

$$\int_e \left[\frac{1}{2} k^2 \sigma'_y U U_0 \right] d\Omega = \frac{1}{2} k^2 \sigma'_y \mathbf{u}_e^T \int_e \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega \mathbf{u}_{0e} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{2e} \mathbf{u}_{0e} \quad 2.28$$

$$\text{其中 } \mathbf{K}'_{2e} = \frac{\sigma'_y k^2 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

单元分析 3

式 2.16 中积分项 3 为边界积分，首先假设边界为 ij 。

已知线积分 $\int_l N_i^a N_j^b d\Gamma = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} l$ ，其中 a, b 为非负整数，其中 l 为 ij 边

的长度，可得到：

$$\frac{1}{2} \int_e k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{3e} \mathbf{u}_e \quad 2.29$$

$$\text{其中 } \mathbf{K}_{3e} = \frac{l}{6} k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}。$$

当边界落在三角形的 im 或 jm 边上时，也有类似的结论。

同理，对式 2.16 中积分项 6 为：

$$\frac{1}{2} \int_e k \sigma'_y \beta U U_0 d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{3e} \mathbf{u}_{0e} \quad 2.30$$

$$\text{其中 } \mathbf{K}'_{3e} = \frac{l}{6} k \sigma'_y \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}。$$

2.2.3.3 系数矩阵总体合成及求解

将单元系数矩阵添加到整体系数矩阵中的相应位置得到扩展矩阵,即式 2.31。

$$\begin{aligned} F(U) &= \sum F_e(U) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\sum \mathbf{K}_{1e} + \sum \mathbf{K}_{2e} + \sum \mathbf{K}_{3e}) \mathbf{U} \\ &\quad + \mathbf{U}^T (\sum \mathbf{K}'_{1e} + \sum \mathbf{K}'_{2e} + \sum \mathbf{K}'_{3e}) \mathbf{U}_0 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{K}' \mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad 2.31$$

令式 2.31 的变分为 0, 得到线性方程组 2.32^[25]。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = -\mathbf{K}' \mathbf{U}_0 \quad 2.32$$

求解该线性方程组得到波数域中异常场的电位, 然后进行傅里叶反变换得到空间域中的异常电位。

$$u(m) = \sum_{i=1}^n g_i U(m, k_i) \quad 2.33$$

加上一次场即可得到总场电位:

$$v = v_0 + u \quad 2.34$$

然后根据式 2.35 计算视电阻率。

$$\rho_s = K \frac{V}{I} \quad 2.35$$

其中 K 为装置系数, I 为电流值, V 为电位差, 是部分节点的电位 v 的线性组合。

2.2.3.4 傅氏变换的波数

对 2.5 维直流电阻率法模拟问题, 波数的长度与计算时间成正比, 同时一般的波数越长能够达到的模拟精度越高。徐世浙^[67]考虑 100m 以内的模拟深度, 采用最优化方法选取了 5 个波数。王飞燕^[68]针对不同的模型选取了三组不同的波数, 正演模拟取得了较好的精度。韩思旭等^[69]采用对正演模拟结果进行校正的方法, 宋滔和王绪本^[70]采用最优化方法计算了两组新的波数, 分别包含 7 个和 9 个波数, 他们均实现了对大极距 (1km) 测量的模拟, 并且取得了较高的精度。

刘云等^[27]给出了一组模拟区域在 (1 ~ 150) C 的范围内的 5 点波数, 其中 C 为缩放比例系数, 其计算精度较高。

本文采用宋滔和王绪本^[70]给出的 7 点波数, 如表 2.1 所示。

表 2.1 7 点波数

Table 2.2 7 wave numbers

k	0.000893	0.007744	0.028639	0.095209	0.337647	1.338806	5.766963
g	0.001869	0.007411	0.021980	0.073982	0.283508	1.210810	5.670225

2.2.3.5 方程求解

对于有限单元法的模拟问题, 最终归结为求解一个大型线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ 的问题。

因为 2.5 维问题对应的线性方程组求解规模一般较小 (节点数小于一万), 所以采用直接求解法在保证求解精度的同时, 计算时间也在接受范围内。本文采用变带宽存储^[25]以及 Cholesky 分解法进行求解^[71,72]。

2.2.3.6 欧拉角的简化处理

式 2.31 和式 2.32 中的方程组还需计算波数域中的一次场电位 U_0 , 点源均匀半空间中各向异性介质的电位表达式为^[73]:

$$v = \frac{I|\rho|^{1/2}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{B}} \quad 2.36$$

其中 $B = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, $\boldsymbol{\rho}$ 为均匀半空间电阻率张量, \mathbf{r}_0 为点源位置向量, \mathbf{r} 为待求点向量。将式 2.36 直接展开进行傅里叶变换非常困难, 因此本报告采用简化欧拉角的方法进行处理, 即假设二维构造下点源附近的介质(背景介质)电性主轴与观测坐标系的夹角为零, 可得到:

$$\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_x, \rho_y, \rho_z) \quad B = \frac{1}{\sqrt{\rho_x x^2 + \rho_y y^2 + \rho_z z^2}} \quad 2.37$$

对式 2.37 进行傅里叶变换, 得到傅氏空间中电位表达式为:

$$U(k, y, z) = \frac{I|\rho|^{1/2}}{2\pi} \sqrt{\sigma_x} K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2}) \quad 2.38$$

计算得到波数域中的一次场后, 代入式 2.31 和式 2.32 便可得到线性方程组,

最后进行求解。

2.2.4 算例分析

下面通过算例验证算法的正确性，对比总场法和二次场法。

模型如图 2.6 所示^[25]为两层模型，其中第一层为 VTI (Vertical Transverse Isotropy) 介质，第二层为各向同性介质。在 A 点供入 1A 的电流，1 至 10 号为接收电极，且电极距为 1m。

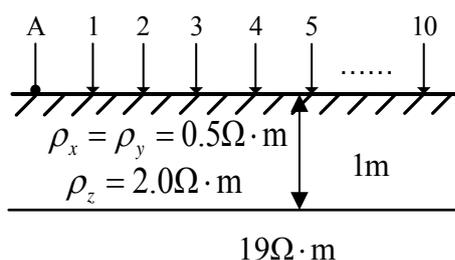


图 2.6 模型 1 两层含 VTI 介质模型

Fig 2.6 Model 1: Two layers with VTI media model

分别使用总场法和异常场法进行模拟，模拟结果与解析解分别进行对比如表 2.2 所示。

表 2.2 数值解与解析解对比

Table 2.2 The comparison of numerical solution and analytical solution

测点位置	解析解(V)	总场法(V)	相对误差(%)	异常场法(V)	相对误差(%)
1	0.3399	0.3510	3.2737	0.3378	0.6120
2	0.2538	0.2600	2.4406	0.2536	0.0827
3	0.2189	0.2204	0.7066	0.2193	0.2010
4	0.1968	0.1977	0.4289	0.1973	0.2388
5	0.1805	0.1802	0.2028	0.1810	0.2603
6	0.1676	0.1668	0.4738	0.1681	0.3043
7	0.1569	0.1560	0.5653	0.1573	0.2549
8	0.1478	0.1469	0.5956	0.1483	0.3179
9	0.1400	0.1391	0.6227	0.1405	0.3643
10	0.1331	0.1322	0.6636	0.1335	0.2930

模拟结果显示，使用异常场法精度较高，所有点相对误差均在 1%以内，而总场法在点源附近误差较大，并且整体的相对误差也比异常场法高。

2.3 三维直流电阻率法各向异性介质数值模拟

本章主要讨论结合非结构网格，实现对各向异性介质直流电阻率法的模拟，同样主要考虑使用二次场法进行模拟。

2.3.1 点源三维各向异性介质电场的变分问题

在地表 A 点供入电流 I，如图 2.7 所示。

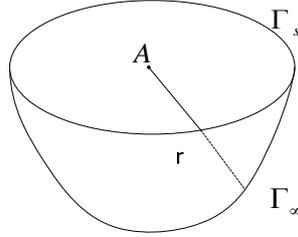


图 2.7 三维点源示意

Fig 2.7 Point Source in three dimension space

总场电位满足的微分方程如 2.39 所示。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = -2I\delta(A) \quad 2.39$$

在地表边界 Γ_s 处，满足的边界条件为：

$$(\boldsymbol{\sigma} \nabla u)_n \Big|_{\Gamma_s} = 0 \quad 2.40$$

远边界为 Γ_∞ ，假设研究区域的异常对 Γ_∞ 边界上的电位没有影响，假设均匀半空间点源设置在地表的 \mathbf{r}_0 处，则地下三维空间中任意点的电位如式 2.41 所示：

$$v = \frac{I |\boldsymbol{\rho}|^{1/2}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{B}} \quad 2.41$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为电阻率张量， $B = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ， \mathbf{r} 为求解点的位置。

对式 2.41 求边界外法向的倒数，并进行变换得到混合边界条件如式 2.42 所示。

$$(\boldsymbol{\sigma} \nabla v)_n + v \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{B} = 0 \quad 2.42$$

其中 \mathbf{n} 为边界的外法向单位向量， $\cos(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ 为点源与边界的矢径与外法向的夹角的余弦，点电流源产生的电位满足的边值问题如式 2.43 所示。

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla v) = -2I\delta(A) & \in \Omega \quad (a) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \quad (b) \\ (\boldsymbol{\sigma} \nabla v)_n + v \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{B} = 0 & \in \Gamma_\infty \quad (c) \end{cases} \quad 2.43$$

同样为了消除源的影响提高求解精度,对二次场进行讨论。假设背景电导率张量为 $\boldsymbol{\sigma}_p$ (电导率张量 $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\rho})^{-1}$), 有:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}' \quad 2.44$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}'$ 分别为地下电导率张量和异常电导率张量,假设背景场电位为 u_0 有:

$$v = u_0 + u \quad 2.45$$

其中 v 和 u 分别为总场电位和二次场电位,同时在地表 u_0 和 u 满足式 2.46。

$$(\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0)_n \Big|_{\Gamma_s} = 0, \quad (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)_n \Big|_{\Gamma_s} = 0 \quad 2.46$$

远边界上背景场和二次场同样满足边界条件式 2.42, 结合式 2.44、2.45, 得到二次场电位 u 满足的混合边界条件为式 2.47。

$$(\boldsymbol{\sigma} \nabla u) \cdot \mathbf{n} + (\boldsymbol{\sigma}' \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} = (q_p - q)u_0 - qu \quad 2.47$$

$$\text{其中 } q_p = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{B_p}, \quad q = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{B}, \quad B_p = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \cdot \boldsymbol{\rho}_p \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

$B = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 。综上所述,二次场 u 满足的边值问题为式 2.48。

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \nabla u_0) = 0 & \in \Omega \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \quad (b) \\ (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) \cdot \mathbf{n} + (\boldsymbol{\sigma}' \nabla u_0) \cdot \mathbf{n} = (q_p - q)u_0 - qu & \in \Gamma_\infty \quad (c) \end{cases} \quad 2.48$$

使用加权余量法求得式 2.48 对应的变分问题,得到式 2.49。

$$\begin{cases} F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u_0) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\infty}} q u^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} (q - q_p) u_0 u d\Gamma \\ \delta F(u) = 0 \end{cases} \quad 2.49$$

式 2.49 即为求解二次场的变分问题。

2.3.2 有限单元法求解

下面主要讨论结合非结构网格，求解式 2.49 中的变分问题。

2.3.2.1 区域剖分

使用有限单元法求解变分问题，需要将求解区域以及一定的扩展边界区域进行离散，如图 2.8 所示为结构网格剖分，研究区域内采用等间距网格或按电极的位置设置网格，如电极距 d ，如图 2.8 中红色区域，研究区域以外为扩展网格区域，如图 2.8 中虚线所示区域，按照等差或等比逐渐增大，直到形成区域的边界。

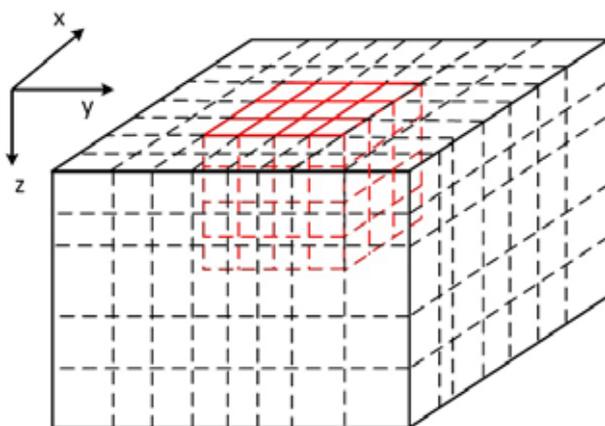


图 2.8 结构网格区域剖分

Fig 2.8 structured grids

采用该网格的好处是程序容易实现，网格数量少且可控，并且许多已有的反演框架是基于结构网格，使得后期对反演的研究也较为容易实现。

结构化网格也存在许多问题，例如实现对复杂构造的建模，即使正演计算中采用四面体网格，但是因为采用结构化网格，对复杂模型的建模变得困难；在有限元模拟含钝角的网格会使计算结果误差变大，而在结构化网格中存在大量这种变形的网格，如边界处的网格；不易实现局部的加密，这大大限制了有限元的计算能力。而这些缺点在非结构网格中均可得到克服。

在三维网格剖分时，本报告同样采用开源软件 Gmsh^[66]来生成非结构网格，如图 2.9 所示。

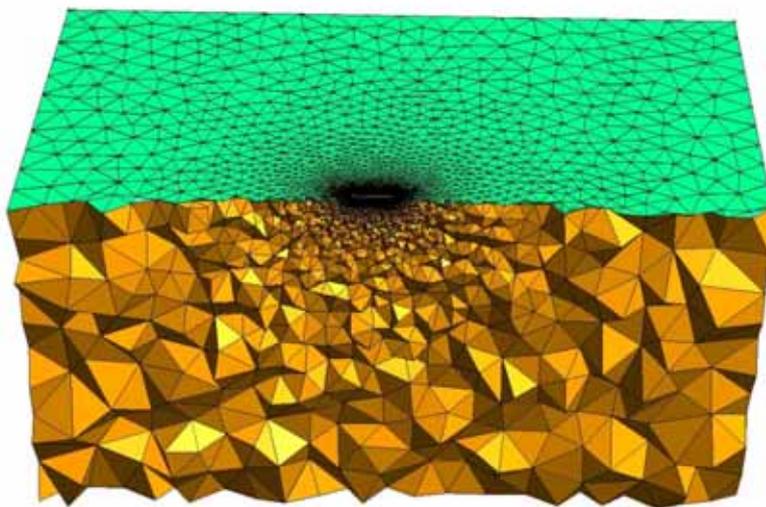


图 2.9 Gmsh 网格示意

Fig 2.9 unstructured grids generated by Gmsh

使用该开源软件生成网格，只需要将关注点移到异常体的位置形态，电极的分布，需要加密的区域以及整体区域的大小即可，网格的生成、编号等工作均交给 Gmsh 来管理。

2.3.2.2 单元分析

如图 2.9 所示，Gmsh 生成网格的基本单元为四面体单元，如图 2.10 所示：

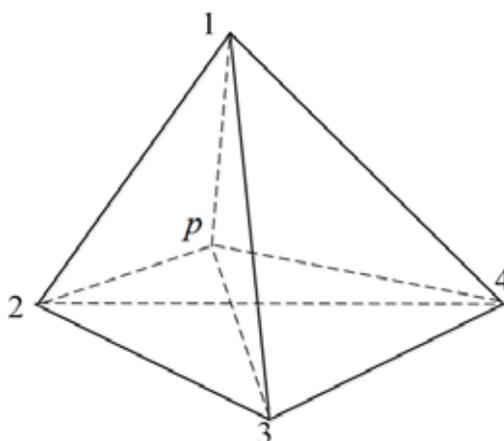


图 2.10 四面体单元示意

Fig 2.10 Tetrahedral element

假设节点处的场值分别为 u_1 ， u_2 ， u_3 ， u_4 ，四面体中电位采用线性插值，四

面体单元内任意点的电位可用这四个角点的电位进行线性插值得到：

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \sum_{i=1}^4 N_i u_i = \mathbf{N}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{N} \quad 2.50$$

其中 $\mathbf{N}^T = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ ， $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ 。

式中 N_i 是形函数，以 N_1 为例，其表达式为： $N_1 = \frac{V_1}{V_e} = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) \frac{1}{6V_e}$ ，

$$\text{其中 } a_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, b_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

式中 V_e 为该单元的体积， N_2 ， N_3 ， N_4 可依次类推。

将变分问题式 2.49 在区域离散化，表示成所有单元的线性组合，即：

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \sum_{\Omega} \int_e [\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)] d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e [\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \nabla u_0)] d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\Omega} \int_e [qu^2] d\Gamma + \sum_{\Omega} \int_e [(q - q_p) u_0 u] d\Gamma \end{aligned} \quad 2.51$$

分别记 2.51 等式中的积分为积分项 1、2、3 和 4，从式中可以发现积分 1 和 2 非常相似，积分 3 和积分 4 也非常相似，下面分别进行分析。

单元分析 1

在单元内对式 2.51 的积分项 1 中的 $\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)$ 进行分析，因为哈密顿算子具

有矢量性，可以记为 $\nabla^T = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ，所以有 $\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = (\nabla u)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)$ ，式 2.51

中积分 1 的积分项可以写为式 2.52。

$$(\nabla u)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = (\nabla \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e^T (\mathbf{N} \nabla^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{N}^T) \mathbf{u}_e \quad 2.52$$

对其中 $\nabla \mathbf{N}^T$ 展开进行计算得到：

$$\nabla \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4) = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \mathbf{E} \quad 2.53$$

其中 V_e 为单元的体积， $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ 。因为 $\nabla \mathbf{N}^T = (\mathbf{N} \nabla^T)^T$ ，将其代

入式 2.52，单元积分的积分项化简为：

$$(\nabla u)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = \frac{1}{36V_e^2} \mathbf{u}_e^T (\mathbf{E}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u}_e \quad 2.54$$

所以第一项单元积分为：

$$\int_e [\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)] d\Omega = \frac{1}{36V_e^2} \mathbf{u}_e^T \int_e [\mathbf{E}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] d\Omega \mathbf{u}_e \quad 2.55$$

因为在四面体单元内，四面体的体积为常数，矩阵 \mathbf{E} 以及电导率张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 也为常数，可以写到积分号以外，同时 $\int_e d\Omega = \frac{1}{V_e}$ ，代入式 2.55，得到：

$$\int_e [\nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u)] d\Omega = \frac{1}{36V_e^2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{E}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{1e} \mathbf{u}_e \quad 2.56$$

其中：

$$\mathbf{K}_{1e} = \frac{1}{36V_e} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \quad 2.57$$

积分项 2 与积分项 1 基本一致，所以可以得到式 2.58。

$$\int_e \nabla u \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \nabla u_0) d\Omega = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{1e} \mathbf{u}_{0e} \quad 2.58$$

其中：

$$\mathbf{K}'_{1e} = \frac{1}{36V_e} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{E} \quad 2.59$$

单元分析 2

对式 2.51 的积分项 3，假设外边界面落在面积单元 Δ_{123} 上，存在

$$\int_{\Delta_{123}} q u^2 d\Gamma = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{2e} \mathbf{u}_e, \text{ 其中 } \mathbf{K}_{2e} = q \cdot \frac{S_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{123} \text{ 为外边界面 } \Delta_{123} \text{ 的面}$$

积。

同理如果边界单元为 Δ_{134} , 那么单元矩阵为 $\mathbf{K}_{2e} = q \cdot \frac{S_{134}}{12} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

类似的, 如果外边界面落在面积单元 Δ_{123} 上, 在积分项 4 中有 $\int_{123} (q - q_p) u_0 u d\Gamma = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}'_{2e} \mathbf{u}_{0e}$ 。

$$\text{其中 } \mathbf{K}'_{2e} = (q - q_p) \cdot \frac{S_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于边界为其它边界面的情况, 只需要将上式中三角形的面积替换成相应边界的面积, 然后将矩阵中的元素对应修改即可。

2.3.2.3 系数矩阵总体合成及求解

将单元系数矩阵添加到整体系数矩阵中的相应位置得到扩展矩阵, 即式 2.60。

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum F_e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\sum \mathbf{K}_{1e} + \sum \mathbf{K}_{2e}) \mathbf{u} \\ &\quad + \mathbf{u}^T (\sum \mathbf{K}'_{1e} + \sum \mathbf{K}'_{2e}) \mathbf{u}_0 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{K}' \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad 2.60$$

令式 2.60 的变分为 0, 得到线性方程组 2.61。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{K}' \mathbf{u}_0 \quad 2.61$$

求解该线性方程组即可得到二次场电位值向量 \mathbf{u} , 即可得到总场电位为 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$ 。

2.3.2.4 方程的求解

对于三维问题, 待求解的线性方程组规模较大, 一般可以达到几万甚至几十万个未知数, 一般采用共轭梯度 (CG) 迭代法进行求解。在实际点源场模拟中, 形成的刚度矩阵 \mathbf{A} 的条件数通常较大^[74,75], 直接将 CG 法应用到点源场的问题中其收敛速度缓慢, 很难满足科研和实际生产的需要。在实际模拟中, 预条件共轭梯度法 (PCG) 已经得到广泛应用, 并取得了较好的效果, 本文采用 SSORCG

(Symmetric Successive Over-Relaxation Conjugate Gradient) 法进行求解^[76,77]。

2.3.3 算例分析

下面通过算例验证并分析各向异性介质的响应。

2.3.3.1 层状介质

图 2.11 给出了一个两层各向异性模型。

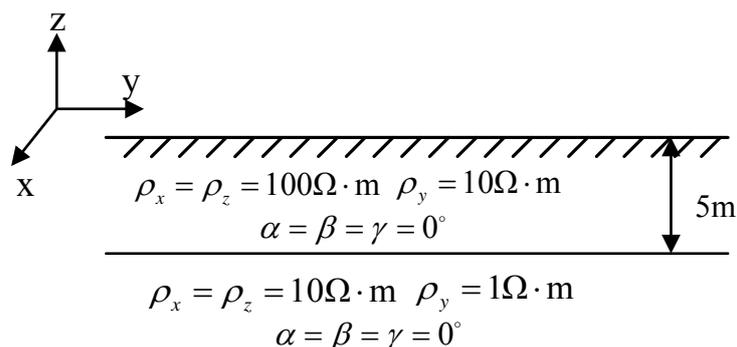


图 2.11 含方位角的两层各向异性介质

Fig 2.11 A two-layered model with azimuthal anisotropy

模型参数如图 2.11 中所示，在该模型中水平方向的电阻率不一致，电极均在 x 方向设置，距离源 1 到 10m 之间每隔 1m 设置一个电极，然后在 10m, 30m, 50m 之间每隔 5m 设置一个电极，在电极处进行加密得到的网格如图 2.12 所示，剖分得到 9639 个节点，58881 个四面体单元。从图中可以看到第一层介质以及两两层介质交界处的网格剖分得较密。

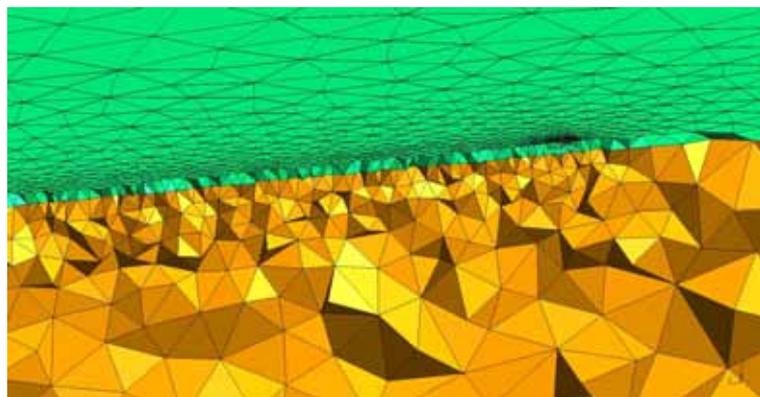


图 2.12 层状介质剖分网格示意

Fig 2.12 Grids of layered model

Li and Spitzer^[34]对该模型进行了模拟，给出了在 x 方向上的二极装置的视电

阻率曲线图。将本报告的计算结果与 Li 的结果进行对比，如图 2.13 所示。

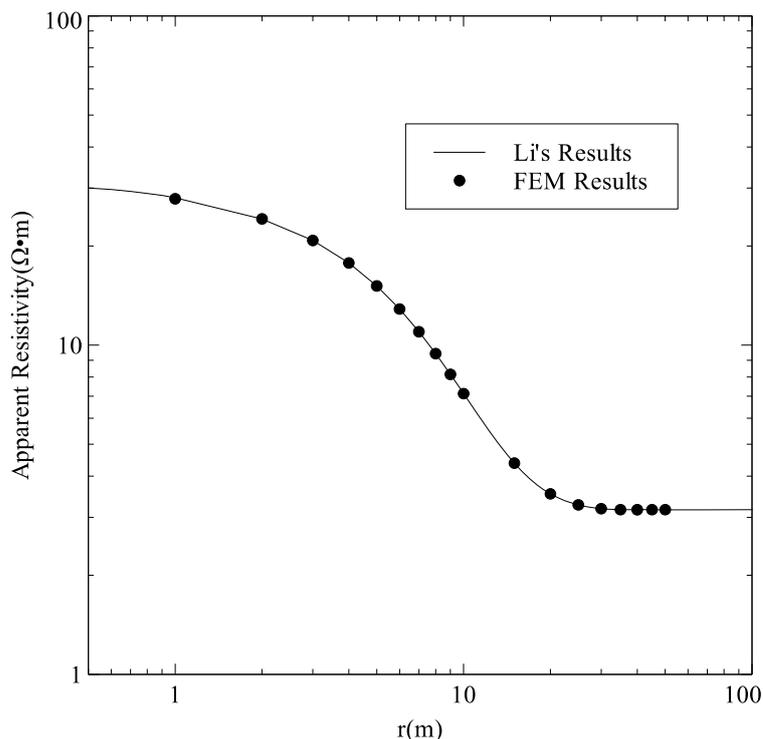


图 2.13 含方位角的两层各向异性介质模拟结果

Fig 2.13 Apparent resistivity of pole-pole array along x dirextion for a two-layered model with azimuthal anisotropy compaerd with Li's results.

从图中可以看出两者结果吻合较好，数据误差在 1% 以内。从结果中可以发现，在 x 方向上测量时，小极距的视电阻率接近第一层的平均电阻率 $31.6\Omega \cdot m$ ，大极距时，视电阻率接近 $3.16\Omega \cdot m$ ，为基底的平均电阻率。

2.4 小结

本章主要研究了基于二次场法的 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质有限元数值模拟技术，同时基于非结构网格，可以实现对复杂介质的模拟。文中主要介绍了通过简化欧拉角的方式计算得到傅氏空间中电位，从而实现基于二次场法的 2.5 维点源场的模拟。并通过算例分析，验证了 2.5 维和三维算法的正确性。

第3章 各向异性介质中横、纵向电阻率对观测的影响

宋滔^[30]讨论了不同观测装置下横、纵向电阻率异常的响应，但是他并没有对产生这个现象的原因进行分析，本章首先通过正演模拟来分析总结不同装置下横、纵向电阻率的响应特点，然后通过对电流密度的计算，分析造成这种结果的原因。

3.1 横、纵向电阻率对观测的影响

因为研究目标主要是横、纵向电阻率的影响，所以本章中的模拟均采用 2.5 维模拟进行计算。设置模型的形态均一致，如图 3.1 所示，异常体距离地面 3m 大小为 $3 \times 3 \text{m}$ ，背景介质为各向同性介质电阻率为 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot \text{m}$ ，在地表进行测量设置 41 个电极，异常体位于测量区域的中心。

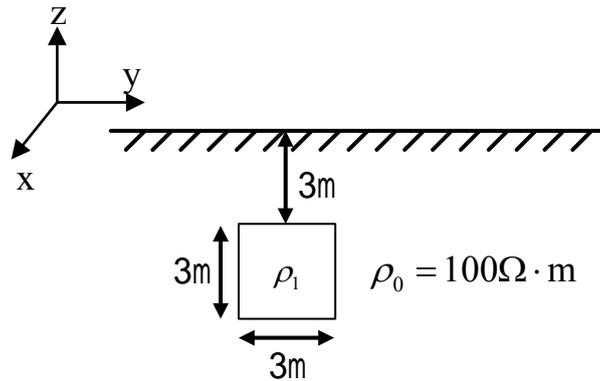


图 3.1 含异常体模型

Fig 3.1 2-D model with an anomalous body

3.1.1 低阻异常体

为了对比横向和纵向电阻率对测量结果的影响，算例中设置图 3.1 中的异常体为三个不同的电阻率各向异性模型，模型 1 异常体为各向同性电阻率为 $\rho = 10 \Omega \cdot \text{m}$ ，模型 2 异常体为各向异性电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 10 \Omega \cdot \text{m}$ ， $\rho_z = 100 \Omega \cdot \text{m}$ ，模型 3 异常体为各向异性，电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 100 \Omega \cdot \text{m}$ ， $\rho_z = 10 \Omega \cdot \text{m}$ 。

取对称四极装置结果中极距 AB 为 3m、7m、11m 和 21m 的视电阻率曲线进

行对比，结果如图 3.2 所示。

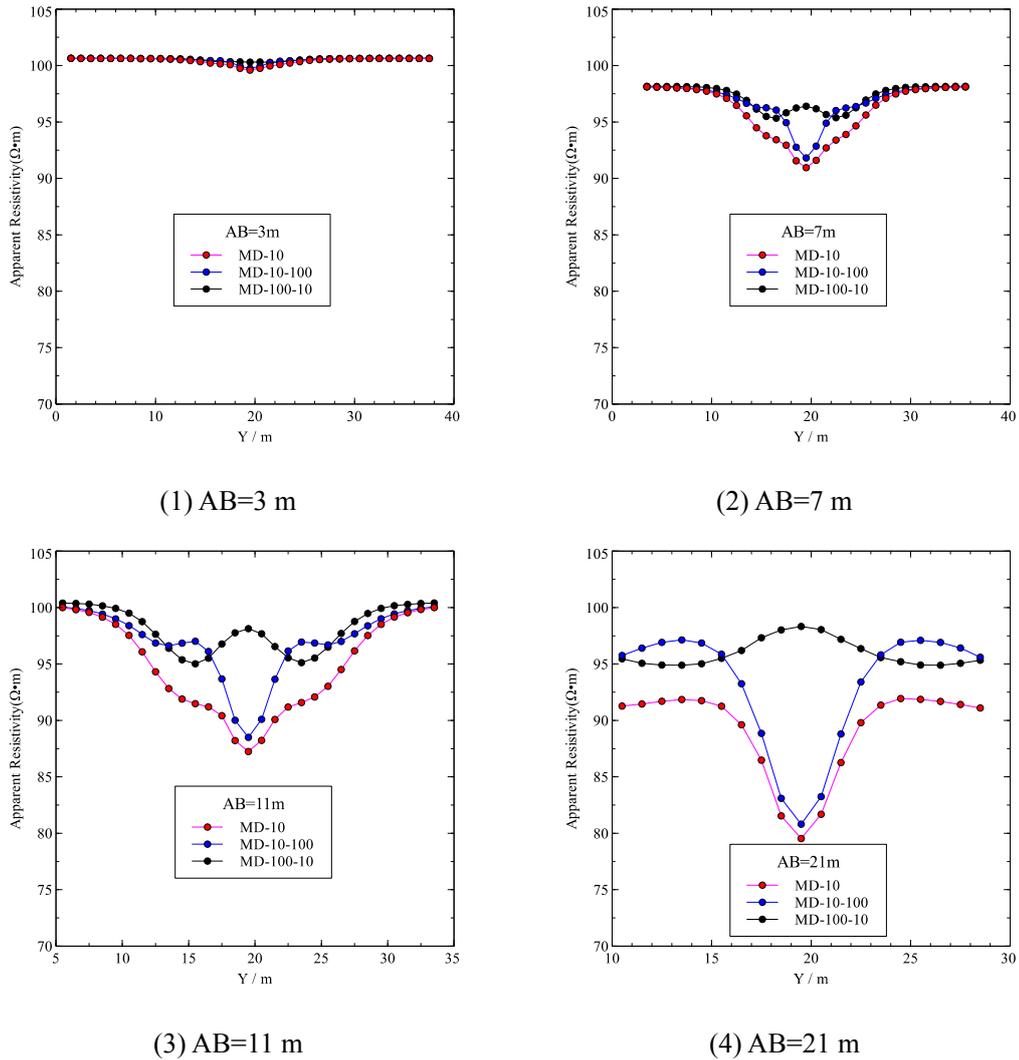


图 3.2 含低阻异常体模型极距为 3m、7m、11m 和 21m 模拟结果曲线图

Fig 3.2 The apparent resistivity of model with low resistivity abnormal body in different pole distance

(a) AB=3m, (b) AB=7m, (c) AB=11m, (d) AB=21m

图中 MD-10 代表异常体电阻率为 $10\Omega\cdot\text{m}$ 的模型；MD-10-100 代表异常体电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 10\Omega\cdot\text{m}$ ， $\rho_z = 100\Omega\cdot\text{m}$ 的模型；MD-100-10 代表异常体电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 100\Omega\cdot\text{m}$ ， $\rho_z = 10\Omega\cdot\text{m}$ 的模型。

从模拟结果可以清晰得看出当极距较小时，对称四极法反映的是较浅介质的电性，所以三个模型的结果相近，均接近 $100\Omega\cdot\text{m}$ ，当极距变大时，受到不同异常体的影响，三个模型的视电阻率曲线出现分离。

图 3.2 中 MD-100-10 模型在四个不同的极距下，视电阻率的值均与背景电阻率较为接近，为 $100\Omega\cdot m$ ，其异常体的横向电阻率为 $100\Omega\cdot m$ ，纵向电阻率为 $10\Omega\cdot m$ ，而 MD-10-100 模型的模拟结果与异常体为各向同性的 $10\Omega\cdot m$ 的模拟结果较为接近。

分别给出三个模型的视电阻率剖面图，如图 3.3 所示。

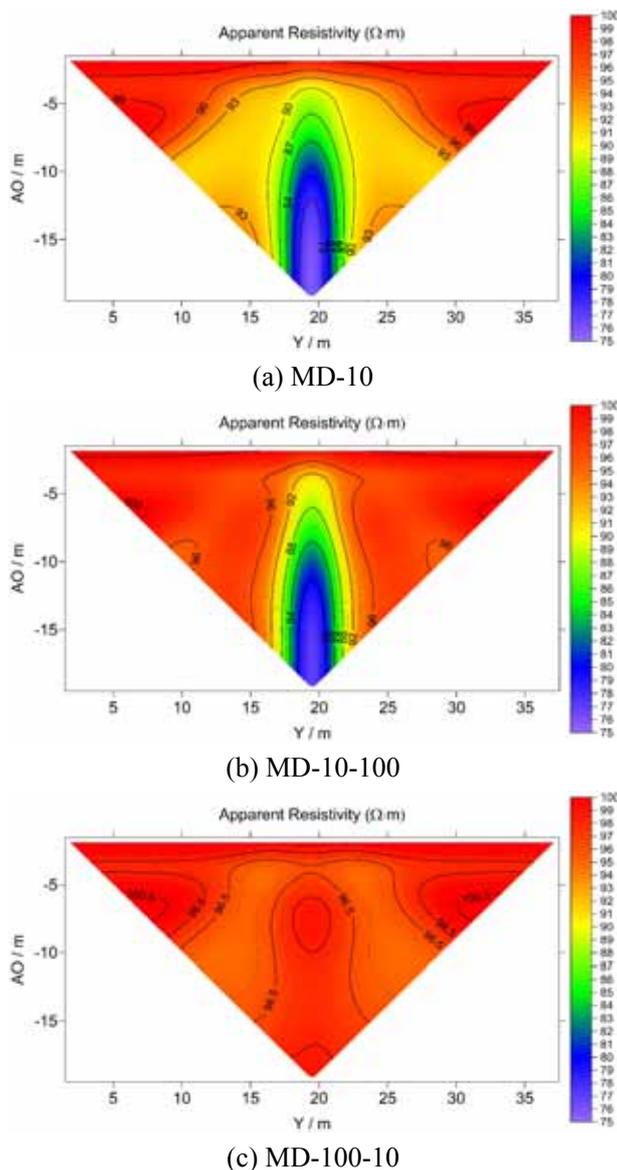


图 3.3 低阻异常体对称四极装置视电阻率剖面

Fig 3.3 The apparent resistivity pseudosection of model with low resistivity abnormal body by symmetric quadrupole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.

从视电阻率剖面图可以看出，MD-10 与 MD-10-100 的模拟结果异常形态和视电阻率值均较为相似，最小值均为 $75\Omega\cdot m$ ；而 MD-100-10 的模拟结果与其它

两个模型差别较大，并且整体接近背景电阻率和异常体的横向电阻率值 $100\Omega\cdot\text{m}$ 。

模拟结果显示在使用对称四极法时，异常体横向电阻率对测量结果的影响较大，而异常体的纵向电阻率对测量的影响较小。

下面分别对比二极装置、正向三极装置以及偶极偶极装置进行模拟分析。

二极装置的模拟结果如图 3.4 所示。

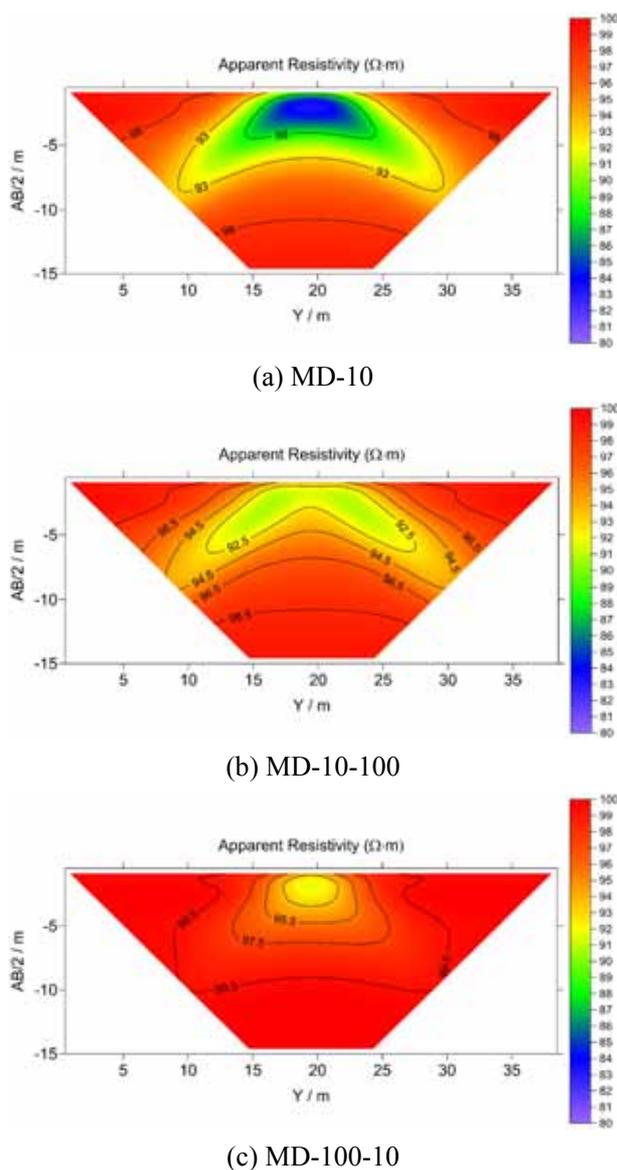


图 3.4 低阻异常体二极装置视电阻率剖面

Fig 3.4 The apparent resistivity pseudosection of model with low resistivity abnormal body by pole-pole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.

模拟结果显示，与对称四极装置的结果相似，异常体的纵向电阻率对模拟结果影响较小，并且二极装置对异常体横向电阻率的变化反映也没有对称四极灵敏。

在模型 MD-10-100 的模拟结果中，最小电阻率为 $90\Omega\cdot\text{m}$ ，而模型 MD-10 的模拟结果最小电阻率为 $80\Omega\cdot\text{m}$ 。但是从模拟结果发现当异常体仅存在纵向电阻率的变化 (MD-100-10) 时，二极装置能够较为准确地反映异常体的范围和位置。

偶极偶极装置模拟结果如图 3.5 所示。

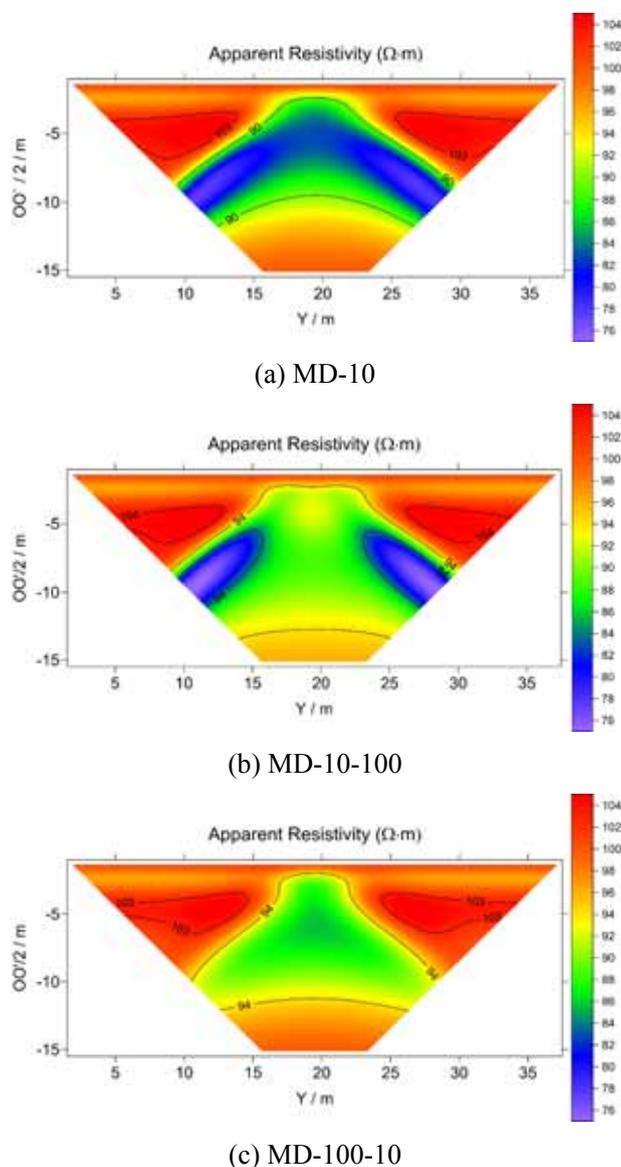


图 3.5 低阻异常体偶极偶极装置视电阻率剖面

Fig 3.5 The apparent resistivity pseudosection of model with low resistivity abnormal body by dipole-dipole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.

模拟结果显示偶极偶极装置对异常体纵向电阻率的反映较好，并且对异常体的位置和形态也有较好反映 (MD-100-10)。异常体水平方向的电阻率同样对模拟结果影响较大，并且与各向同性异常体的结果相似。

3.1.2 高阻异常体

同样设置图 3.1 中的异常体为三个不同的电阻率模型，模型 1 (MD-1000) 异常体为各向同性电阻率为 $\rho = 1000\Omega \cdot m$ ，模型 2 (MD-1000-100) 异常体为各向异性电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 1000\Omega \cdot m$ ， $\rho_z = 100\Omega \cdot m$ ，模型 3 (MD-100-1000) 异常体为各向异性电阻率为 $\rho_x = \rho_y = 100\Omega \cdot m$ ， $\rho_z = 1000\Omega \cdot m$ 。

模拟对称四极装置，取极距 AB 分别为 3m、7m、11m 和 21m 的视电阻率进行对比，结果如图 3.6 所示。

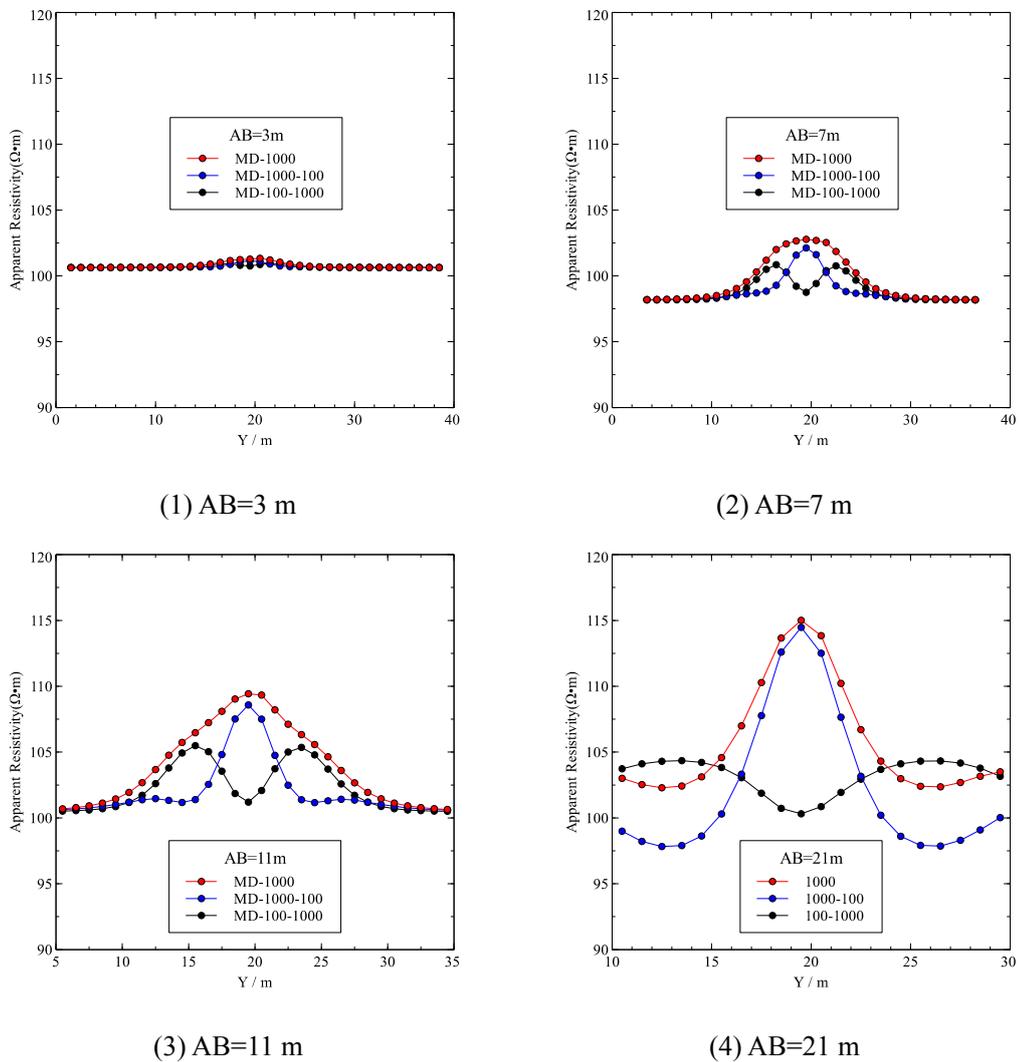


图 3.6 含高阻异常体模型极距为 3m、7m、11m 和 21m 模拟结果曲线图

Fig 3.6 The apparent resistivity of model with high resistivity abnormal body in different pole

distance. (a) AB=3m, (b) AB=7m, (c) AB=11m, (d) AB=21m.

与低阻异常体模型的模拟结果类似,极距较小时三个模型的结果相近均接近 $100\Omega\cdot m$, 当极距变大时, 受到不同异常体的影响三个模型的视电阻率曲线出现分离。并且视电阻率曲线受到纵向电阻率的影响较小, 图 3.6 中 MD-1000-100 模型的模拟结果与 MD-1000 的模拟结果较为相似, 并且极大值也非常接近。

下面分别给出对称四极、二极装置以及偶极偶极装置对应的模拟结果, 分别如图 3.7、图 3.8、图 3.9 所示。

对称四极装置的视电阻率剖面, 如图 3.7 所示。

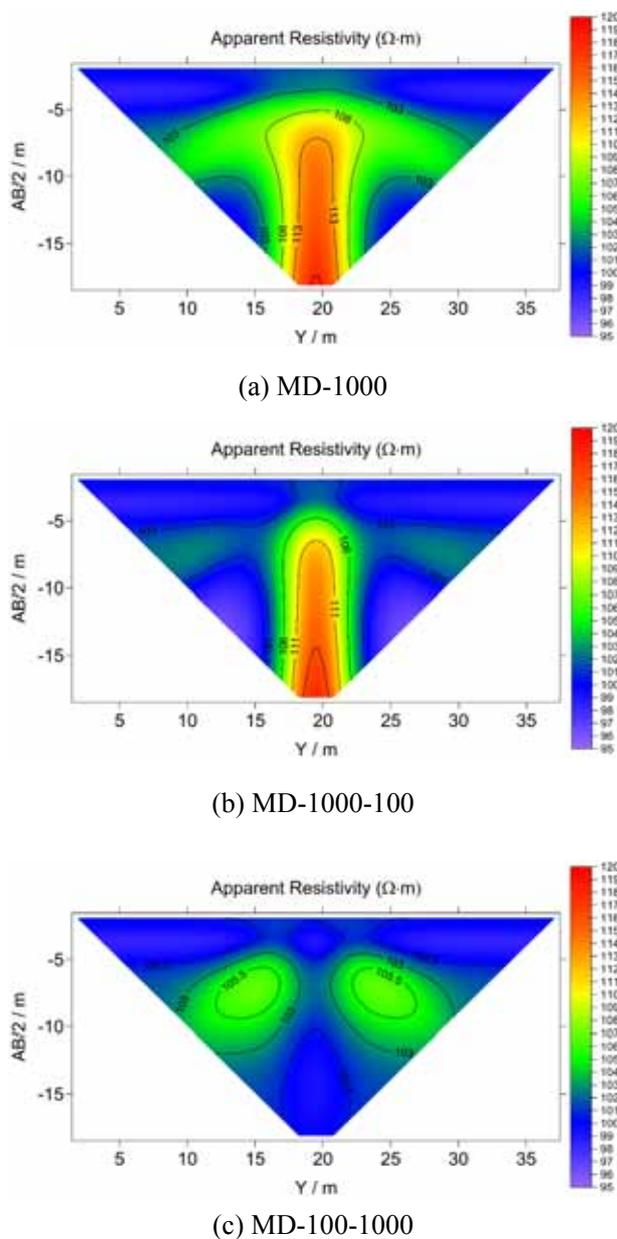
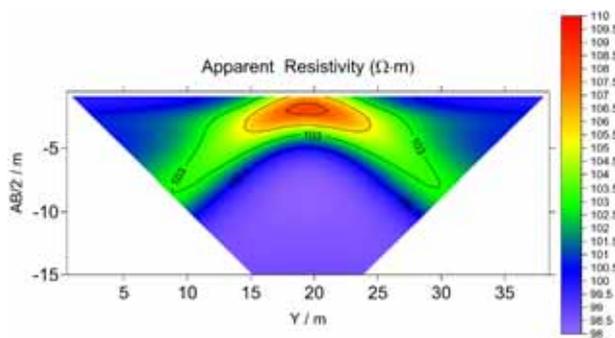


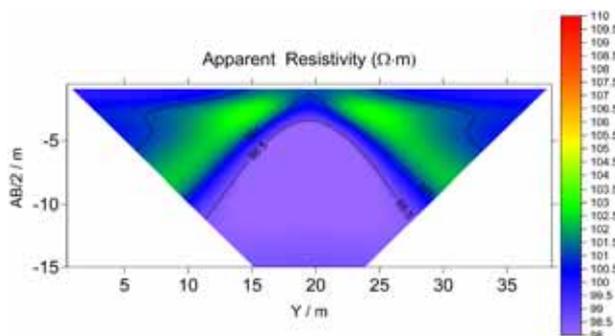
图 3.7 高阻异常体对称四极装置视电阻率剖面

Fig 3.7 The apparent resistivity pseudosection of model with high resistivity abnormal body by

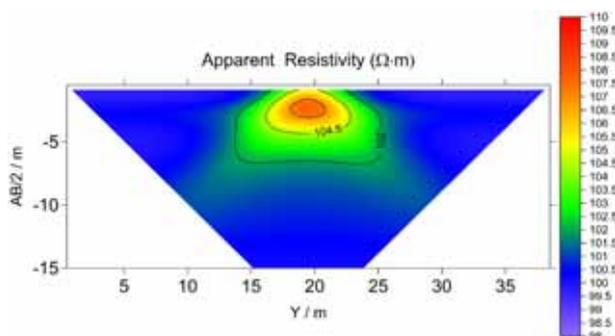
symmetric quadrupole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.



(a) MD-1000



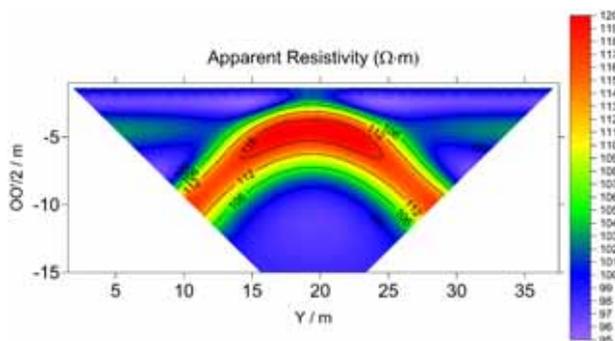
(b) MD-1000-100



(c) MD-100-1000

图 3.8 高阻异常体二极装置视电阻率剖面

Fig 3.8 The apparent resistivity pseudosection of model with high resistivity abnormal body by pole-pole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.



(a) MD-1000

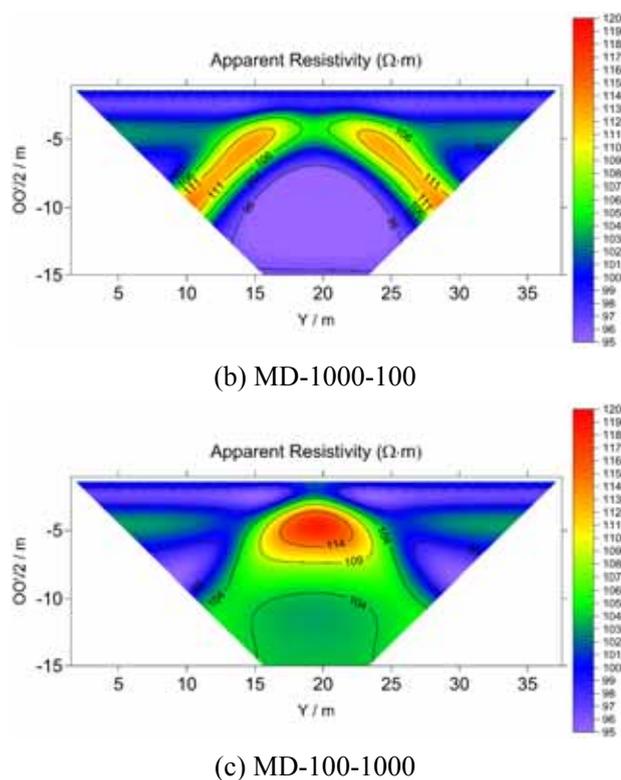


图 3.9 高阻异常体偶极偶极装置视电阻率剖面

Fig 3.9 The apparent resistivity pseudosection of model with high resistivity abnormal body by dipole-dipole array. (a) model MD-10, (b) model MD-10-100, (c) model MD-100-10.

从以上模拟结果可以发现，各向异性的高阻异常与低阻异常有类似的结论，即纵向电阻率对数值模拟结果影响相对较小，二极装置和偶极偶极装置对纵向电阻率反映相对灵敏，能够较为准确地反映异常体的形态和位置。

3.2 电流密度分析

直流电阻率法勘探的原理是向地下供入稳定电流，当地下存在异常体时，电流受到影响，反映在地表即接收到的电位信号的异常，最终反映为视电阻率的异常，所以推测是因为电流密度分布的不同，导致了不同装置下横、纵向电阻率勘探能力的不同。

为了验证这个想法，首先给出电流密度的模拟计算方法，然后通过模拟不同装置的电流密度分布以及异常电流密度分布，进行分析验证。

3.2.1 电流密度的计算

欧姆定律可以写为式 3.1：

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \quad 3.1$$

其中：

$$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)^T \quad 3.2$$

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T \quad 3.3$$

对于各向同性介质电导率 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma$ 为标量，所以电流密度 \mathbf{j} 和电场 \mathbf{E} 始终平行，但是当介质为各向异性时，即 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}^{-1}$ 为张量时，电流密度和电场一般不再平行^[34]，当构造为二维时即介质在 x 方向不变，选择 y - z 平面为研究平面，此时电导率张量可以记为式 3.4。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad 3.4$$

将式 3.2、3.3 和 3.4 带入 3.1 中，得到在 y 和 z 方向上的电流密度表达式为式 3.5

$$\begin{aligned} j_y(y, z) &= \sigma_{yy} E_y + \sigma_{yz} E_z \\ j_z(y, z) &= \sigma_{yz} E_y + \sigma_{zz} E_z \end{aligned} \quad 3.5$$

稳定电场 \mathbf{E} 和电位 v 之间的关系如式 3.6 所示。

$$\mathbf{E} = -\nabla v \quad 3.6$$

在 y - z 平面上，可以得到式 3.7。

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad 3.7$$

其中 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial z}$ 为空间电位在 y 和 z 方向上的偏导数，图 3.10 中给出了在矩

形单元中根据四个节点的电位值计算电场的示意。

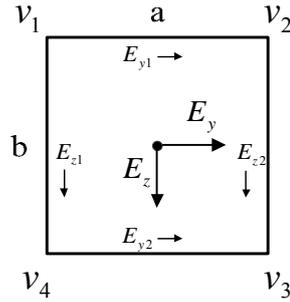


图 3.10 在矩形单元中计算电场示意

Fig 3.10 Use four rectangular nodes to calculate the electric field

在单元中心的电场计算方式如式 3.8 所示。

$$E_y = \frac{E_{y1} + E_{y2}}{2} \quad 3.8$$

$$E_z = \frac{E_{z1} + E_{z2}}{2}$$

在矩形单元内式 3.7 中的偏导数可以通过式 3.9 计算得到。

$$E_{y1} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{v_2 - v_1}{2a}, E_{y2} = -\frac{\partial v}{\partial y_2} = -\frac{v_3 - v_4}{2a} \quad 3.9$$

$$E_{z1} = -\frac{\partial v}{\partial z_1} = -\frac{v_4 - v_1}{2b}, E_{z2} = -\frac{\partial v}{\partial z_2} = -\frac{v_3 - v_2}{2b}$$

所以电场在 y 和 z 方向上的分量可以通过矩形单元的四个节点计算得到, 如式 3.10 所示。

$$E_y = -\frac{v_2 - v_1 + v_3 - v_4}{2a} \quad 3.10$$

$$E_z = -\frac{v_4 - v_1 + v_3 - v_2}{2b}$$

将式 3.10 带入式 3.5 中即可得到电流密度在 y 和 z 方向上的分量。

为了结合矩形网格计算电流密度, 在本章的计算中采用的结构网格进行剖分, 首先将整个计算区域采用矩形进行规则的剖分: 在研究区域内采用等间距网格或按电极的位置设置节点, 如图 3.11 中红色区域; 在研究区域以外的稀疏网格部分, 按照等比的方式逐渐增大网格, 形成稀疏网格和有限元的边界。

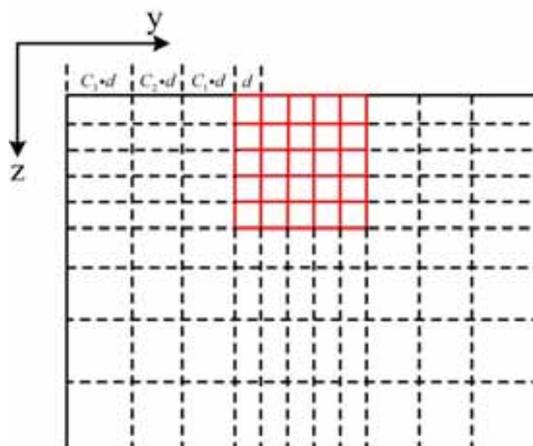


图 3.11 研究区域和稀疏网格

Fig 3.11 Research area and sparse grid

然后将四边形网格剖分成四个三角形，最终形成的网格如图 3.12 所示，剖分的基础单元依然是三角单元。

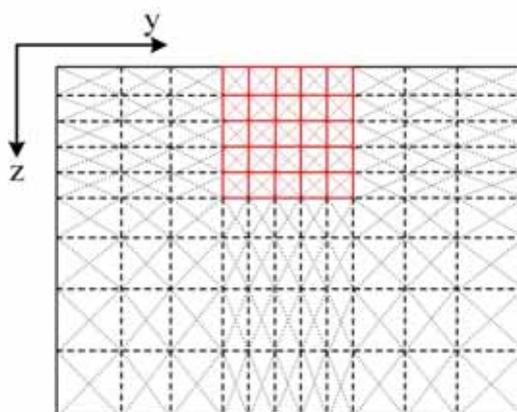


图 3.12 区域网格剖分

Fig 3.12 Regional grid segmentation

3.2.2 点电流源

下面通过计算、绘制点电流源的电流密度分布，来分析其电场分布特点。

为了方便对比上节中的模型，在以下的例子中均设置与图 3.1 中模型对应的观测参数，即在地表放置 41 个电极，电极距均为 1m，向地下供入的电流为 1A。

首先观察均匀半空间模型，背景电阻率为 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot \text{m}$ 的模型，当在 5 号电极供入 1A 电流时电流密度如图 3.13 所示。

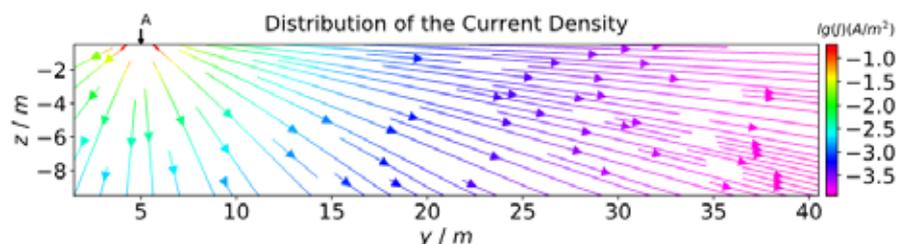


图 3.13 均匀半空间点源场电流密度分布

Fig 3.13 Uniform half-space current density distribution caused by a point source

图中箭头的方向即为电流密度的方向，颜色指示了电流密度的强度，色标如图中右侧所示。同时为了突出电流密度的变化，在图中均对电流密度强度取以 10 为底的对数，图中 A 指示了点电流源位置（以下图示相同）。

从图 3.13 中可以明显发现在水平方向距离点电流源 A 一定距离后，电流密度水平方向上的分量越大，即以水平方向流动为主，同时电流密度随距离的衰减非常快。

图 3.14 给出了图 3.1 中对应模型 MD-10 的电流密度分布，图中红色矩形区域为模型中的异常体位置。

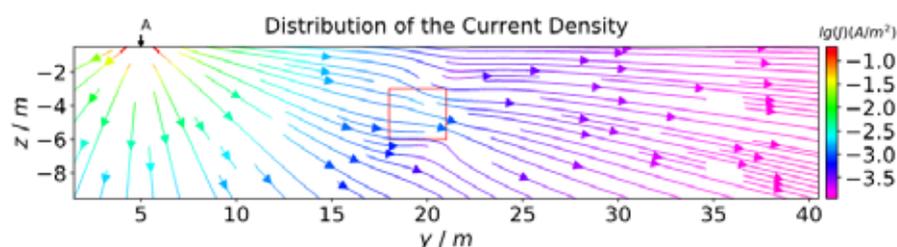


图 3.14 模型 MD-10 点源电流密度分布

Fig 3.14 Current density distribution for MD-10 caused by a point source

从图中可以明显观察到在红色矩形框靠近点源的位置，电流密度受到低阻异常体的影响向矩形框也就是异常体聚集，这显然是符合欧姆定律的。

因为在正演模拟中计算得到了二次场电位，所以在此直接给出二次场的电流密度分布，即由异常体导致的电流密度分布，如图 3.15 所示。

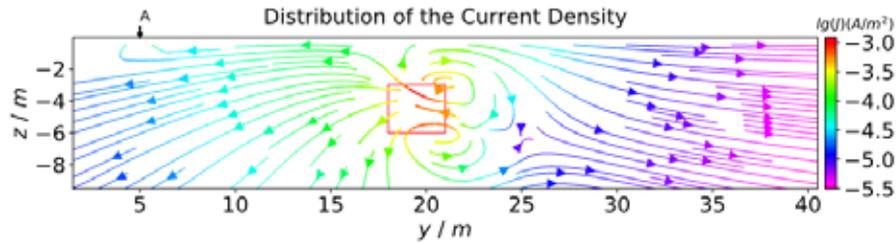


图 3.15 模型 MD-10 点源二次场电流密度分布

Fig 3.15 The current density distribution of secondary field caused by MD-10, using point source

从图 3.15 中可以发现，二次场的电流密度主要分布在异常体附近，异常幅度最大的值也分布在红色区域附近。

图 3.16 和图 3.17 分别给出了模型 MD-10-100 和模型 MD-100-10 的点源电流密度分布。

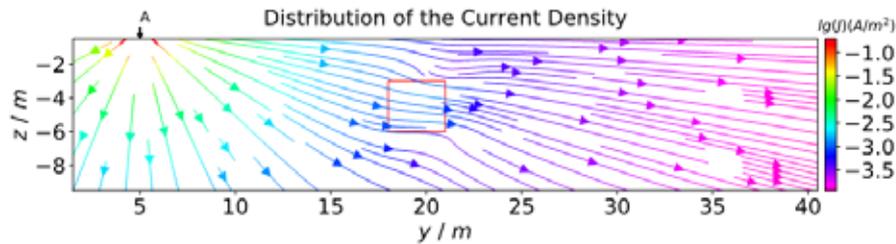


图 3.16 模型 MD-10-100 点源电流密度分布

Fig 3.16 Current density distribution for MD-10-100, using point source

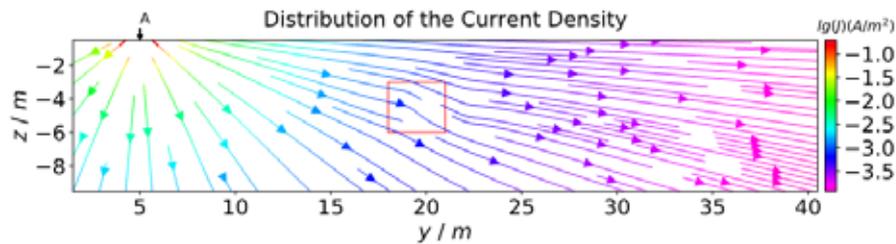


图 3.17 模型 MD-100-10 点源电流密度分布

Fig 3.17 Current density distribution for MD-100-10, using point source

对模型 MD-10-100，电流在异常体区域内主要沿着 y 方向流动，此时异常体中的横向电阻率为 $\rho_L = 10 \Omega \cdot m$ 相对背景电阻率和异常体的纵向电阻率更小，这就导致了电流的横向流动。类似的，对模型 MD-100-10，异常体的纵向电阻率 $\rho_T = 10 \Omega \cdot m$ 更低，也就导致了电流有向纵向流动的趋势。

同样，绘制出模型 MD-10-100 和模型 MD-100-10 的二次场电流密度分布，分别如图 3.18 和图 3.19 所示。

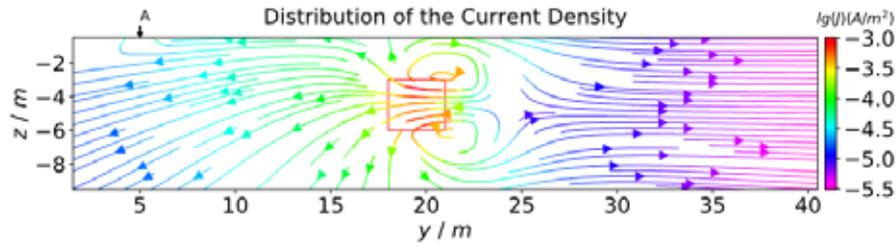


图 3.18 模型 MD-10-100 点源二次场电流密度分布

Fig 3.18 The current density distribution of secondary field caused by MD-10-100, using point source

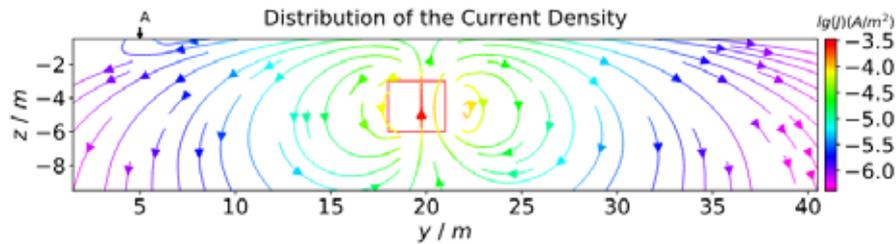


图 3.19 模型 MD-100-10 点源二次场电流密度分布

Fig 3.19 The current density distribution of secondary field caused by MD-100-10, using point source

从图 3.18 和图 3.19 中可以更加明显发现，异常电流密度主要集中在异常体附近。横向的相对低阻导致了电流密度的横向流动，同理纵向也可以得到类似结论，所以点源场对横、纵向电阻率异常均有一定的识别能力。同时可以发现相同幅度的电阻率异常，纵向电阻率引起的二次场电流密度相对横向电阻率引起的二次场电流密度更小，图中分别显示为-3.5 和-3.0，反映到勘探中即纵向电阻率引起的观测异常相对横向异常更小，这与上一节中的结论相符。

3.2.3 对称四极装置

当在 5 号电极供入 1A 的电流，在 35 号电极供入-1A 的电流时，均匀半空间模型的电流密度分布如图 3.20 所示。

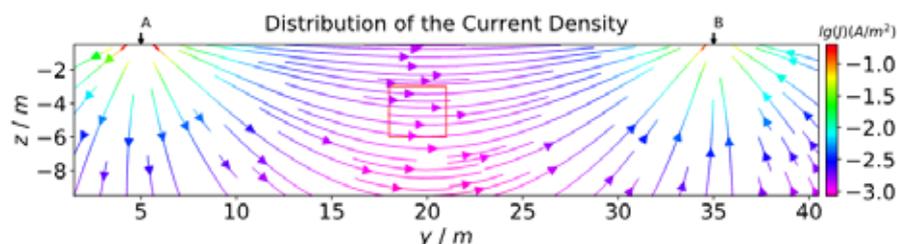
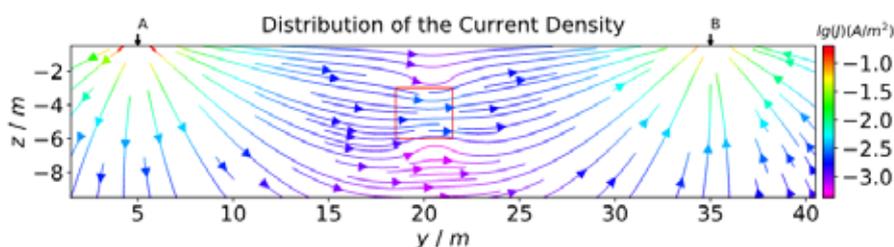


图 3.20 对称四极装置均匀半空间电流密度分布

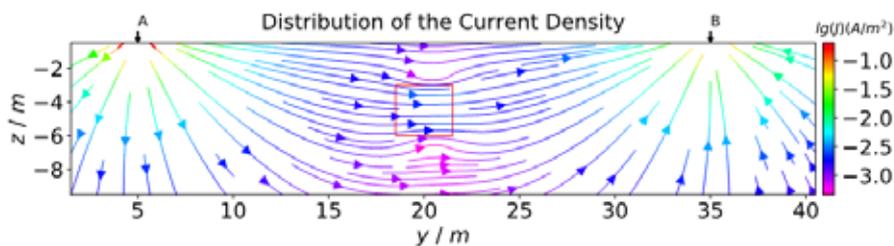
Fig 3.20 Uniform half-space current density distribution caused by Wenner array

从图中可以明显看到电流密度在 AB 极之间主要在 y 方向流动，而测量区域也在这之间，所以可以推测对称四极装置对 z 方向，即纵向电阻率的分辨能力非常差。

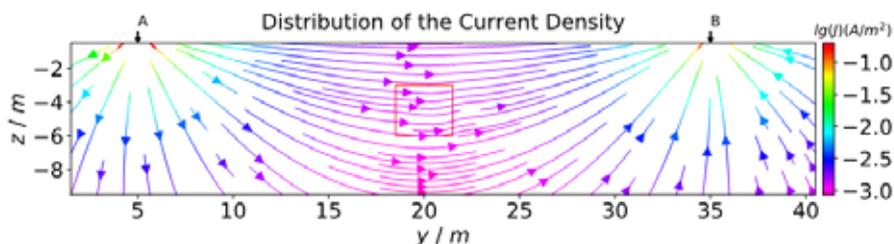
同样，计算并绘制出三个不同模型的电流密度分布，如图 3.21 所示。



(1) MOD-10



(2) MOD-10-100



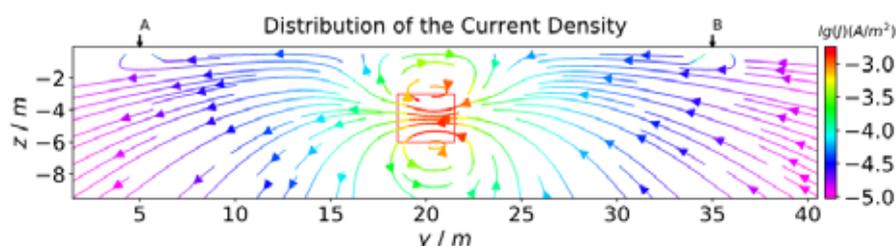
(3) MOD-100-10

图 3.21 对称四极装置三个不同模型的电流密度分布

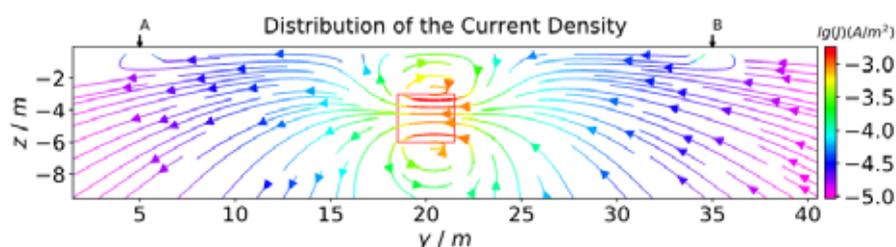
Fig 3.21 The current density distribution of three models caused by Wenner array

图 3.21 中 MOD-10 和 MOD-10-100 的电流密度分布非常相似，而 MOD-100-10 的电流密度分布与均匀半空间的电流密度分布图 3.20 非常相似，即模型 MOD-100-10 对电流密度基本没有影响。

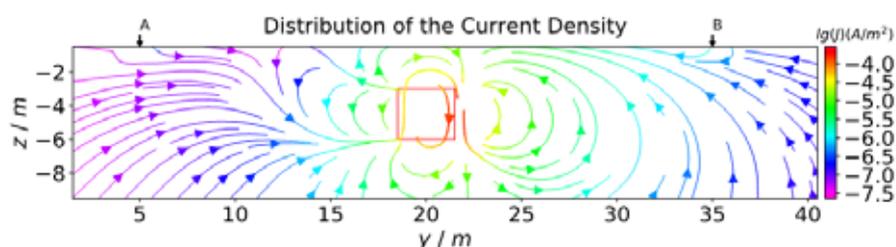
图 3.22 给出了三个模型对应的二次场电流密度。



(1) MOD-10



(2) MOD-10-100



(3) MOD-100-10

图 3.22 对称四极装置三个不同模型的二次场电流密度分布

Fig 3.22 The current density distribution of secondary field caused by three models, using Wenner array

同样的，模型 MOD-10 和模型 MOD-10-100 产生的二次场电流密度主要以 y 方向为主，而模型 MOD-100-10 产生的二次场电流密度主要以 z 方向为主，同时可以发现模型 MOD-10 和模型 MOD-10-100 产生的二次场电流密度幅度比模型 MOD-100-10 产生的二次场电流密度幅度大了一个数量级，所以模型 MOD-100-10 产生的观测异常非常小。

通过以上的模拟可以发现，对称四极装置对纵向电阻率异常不敏感，主要是因为装置的电流密度分布以横向为主，所以其视电阻率中的异常主要是横向电阻率导致的。

3.2.4 偶极源

对偶极偶极装置，分别在 5 号和 7 号电极供入 1A 和-1A 的电流，其均匀半空间下的电流密度分布如所示。

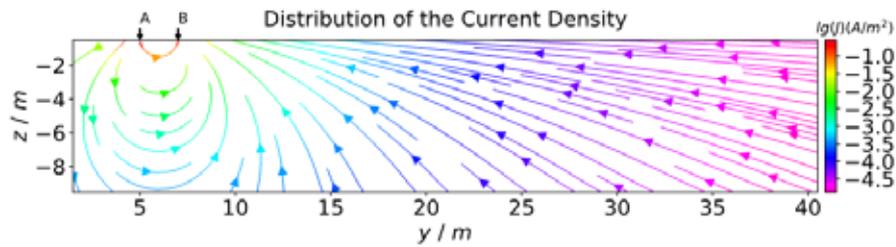
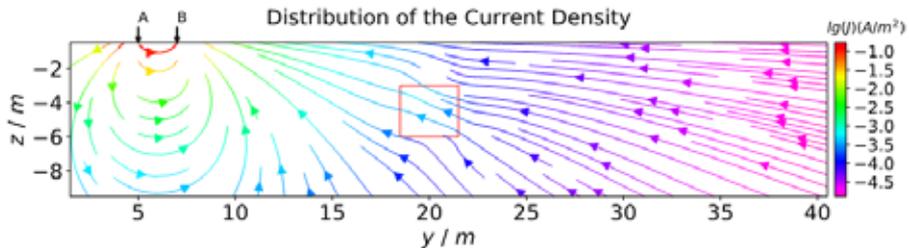


图 3.23 均匀半空间偶极源电流密度分布

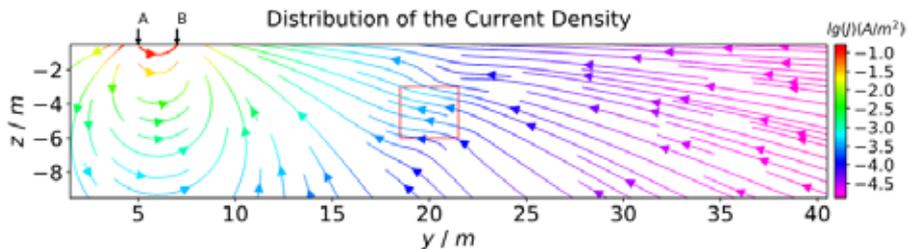
Fig 3.23 Uniform half-space current density distribution caused by a dipole source

在偶极源（5-7 号电极）下方电流主要以水平方向流动为主，在 10-15 号电极之间电流以纵向为主。偶极源的电流密度分布解释了其对纵向电阻率具有一定的探测能力。

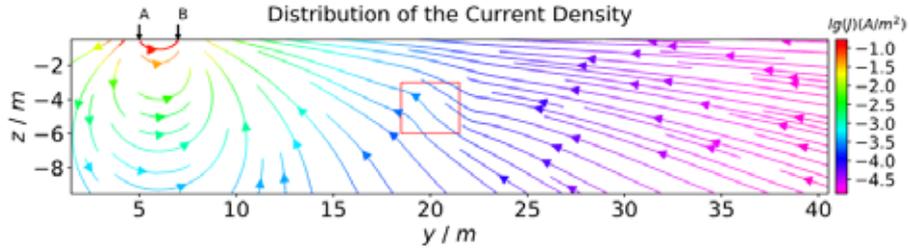
同样的，给出了三个模型下偶极源的电流密度分布。



(1) MOD-10



(2) MOD-10-100

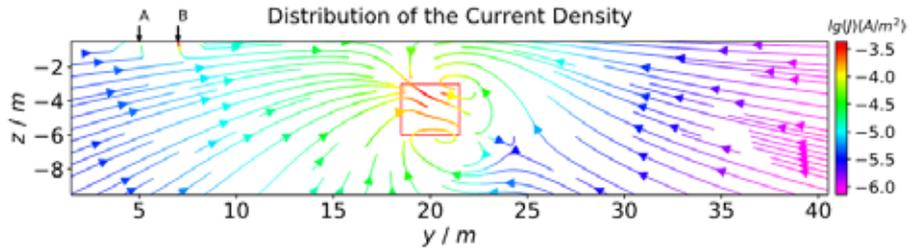


(3) MOD-100-10

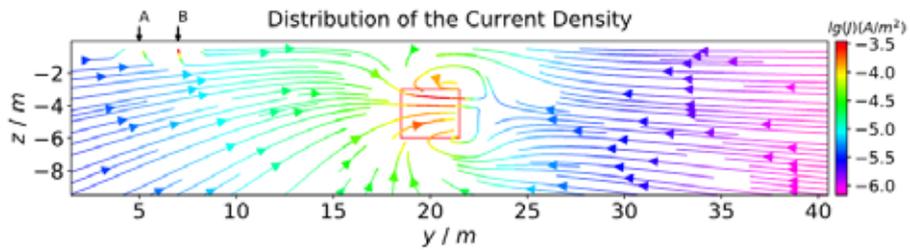
图 3.24 偶极源三个不同模型的电流密度分布

Fig 3.24 The current density distribution of three models caused by a dipole source

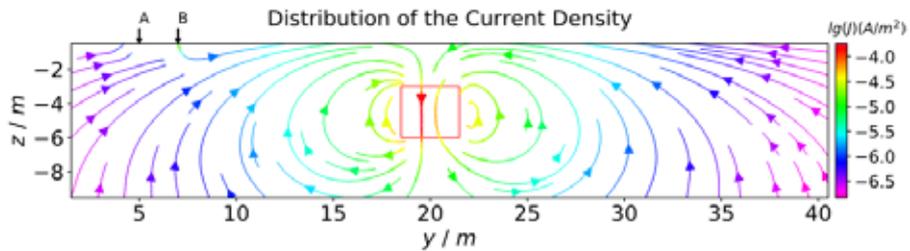
图中可以看到电流密度曲线受到异常体的影响，在红色区域附近变得扭曲。同样，给出他们的二次场电流密度分布，如图 3.25 所示。



(1) MOD-10



(2) MOD-10-100



(3) MOD-100-10

图 3.25 偶极源三个不同模型二次场电流密度分布

Fig 3.25 The current density distribution of secondary field caused by three models, using dipole source

偶极源二次场电流密度在异常体处的分布与点电流源非常类似，模型 MOD-10-100 在异常体处的二次场电流密度主要沿着 y 方向，模型 MOD-100-10 异常体处的二次场电流密度主要沿着 z 方向，而模型 MOD-10 主要是 y - z 方向。同时模型 MOD-100-10 产生的二次场幅度也较小，所以其观测得到的异常也较小。

对模型 MOD-10-100，当偶极源移动到异常体上方时，横向电阻率 ρ_L 对电流密度的影响起主要作用，而异常体的横向电阻率为 $10 \Omega \cdot m$ 小于背景电阻率，所以其异常能够得到反映，而此时对应视电阻率剖面上的位置为图 3.26 中的蓝色矩形区域附近。当偶极源与异常体有一定水平距离时，例如当偶极源在 15-17 号电极处，电流密度在异常体处主要以纵向流动为主，异常体处的纵向电阻率与背景一致，电流基本没有受到影响，所以视电阻率也没有异常，对应视电阻率剖面上的位置为图 3.26 中的红色矩形区域附近，也就是说在模型 MOD-10-100 中红色区域附近基本不能反映出介质的纵向异常，这也解释了图 3.5(b)中的奇怪现象。

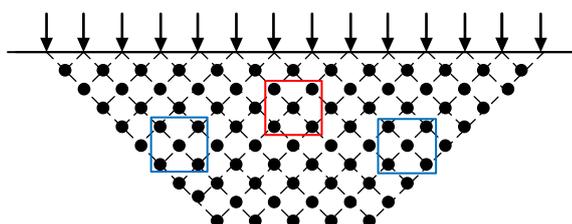


图 3.26 偶极偶极装置示意

Fig 3.26 Dipole-dipole array

3.3 小结

本章通过对不同横、纵向电阻率的异常体模型进行多装装置的模拟对比，以及对电流密度的分析我们得到以下几点结论。

1. 一般的，直流电阻率法勘探中横向电阻率异常对视电阻率的影响比纵向大。
2. 对称四极装置对纵向电阻率异常不敏感，二极装置和偶极偶极装置相对对称四极装置而言，其对纵向电阻率异常有一定分辨能力。
3. 一般的偶极偶极装置的异常更为明显，横向电阻率异常在对应视电阻率

剖面异常体的两侧较为明显,而纵向电阻率异常在视电阻率剖面中出现在对应异常体附近的位置。

4. 造成不同装置下横、纵向电阻率异常不同分辨能力的原因是电流密度的分布,所以在实际勘探中,如果知道目标区域电性各向异性的特点,就可以根据模拟结果,选用效果更好的勘探装置。

第4章 时间域激发极化法中电性各向异性介质的特点

本章主要讨论激发极化法宏观各向异性的表现,以及电性各向异性中的各向异性反常现象。并通过数值模拟研究各向异性介质极化率的响应。

4.1 极化率宏观各向异性

对激发极化法现有的研究主要集中在各向同性介质中^[2,78],而激发极化效应是否具有各向异性是值得研究的。在本报告的研究中暂时不考虑介质的微观各向异性,即矿物、晶体在不同方向上发育特征不一样等引起的各向异性,仅考虑宏观各向异性,即薄互层介质引起的各向异性。

4.1.1 薄互层介质电阻率宏观各向异性

Wiese^[79]给出了电阻率薄互层介质宏观各向异性的表现,在本节中给出简单的证明。

假设薄互层介质如图 4.1 所示。

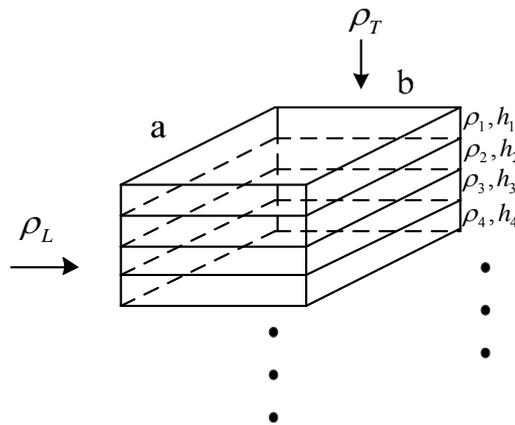


图 4.1 薄互层介质电阻率示意

Fig 4.1 thin interbedded isotropic resistivity series

假设每层介质为各向同性,每层的厚度为 h_i ,电阻率为 ρ_i , a 和 b 分别为介质的长和宽。该介质在宏观上表现为各向异性介质,其各向异性电阻率分别为:垂直方向 ρ_T ,水平方向 ρ_L 。

从横向测量时,即电流沿着水平方向流动,此时各个介质层可以视为电阻的

并联，每层的电阻为 $R_i = \frac{\rho_i b}{a h_i}$ ，电导为 $S_i = \frac{a h_i}{\rho_i b}$ ，根据电阻并联的公式得到水平方向的电阻如式 4.1 所示。

$$R_{eqL} = \frac{1}{\sum S_i} = \frac{1}{\sum \frac{a h_i}{\rho_i b}} = \frac{b}{a \sum \frac{h_i}{\rho_i}} \quad 4.1$$

假设水平方向测量得到的电阻率为 ρ_L ，那么水平方向的电阻也可表示为式 4.2。

$$R_{eqL} = \frac{\rho_L b}{a \sum h_i} \quad 4.2$$

垂直方向真实的厚度为 $\sum h_i$ ，通过简单的推导可得到横向电阻率如式 4.3 所示。

$$\rho_L = \frac{\sum h_i}{\sum \frac{h_i}{\rho_i}} \quad 4.3$$

即得到了宏观横向电阻率的表达式，可见它与薄互层各层的电阻率与厚度有关，与薄互层的长度和宽度无关。

类似的，纵向测量时，即电流沿着垂直方向流动，此时各个介质层可以视为电阻的串联，每层的电阻如 4.4 所示。

$$R_i = \frac{\rho_i h_i}{ab} \quad 4.4$$

根据电阻的串联原理，纵向电阻如式 4.5 所示。

$$R_{eqT} = \sum R_i = \sum \frac{\rho_i h_i}{ab} = \frac{\rho_T \sum h_i}{ab} \quad 4.5$$

所以得到纵向电阻率的表达式如 4.6 所示。

$$\rho_T = \frac{\sum \rho_i h_i}{\sum h_i} \quad 4.6$$

即得到了宏观纵向电阻率的表达式，同样它仅与薄互层各层的电阻率与厚度有关。

4.1.2 薄互层介质极化率宏观各向异性

薄互层介质如图 4.2 所示。

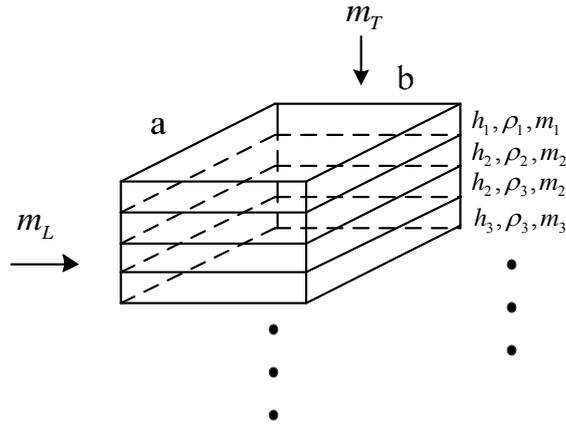


图 4.2 薄互层介质极化率示意

Fig 4.2 thin interbed isotropic chargeability series

如图 4.2 所示，每层介质的极化率为 m_i ，电阻率为 ρ_i ，厚度为 h_i 。根据极化率的定义，当下地下供入稳定电流时，测量得到两个电压，即一次场电压（ U ）和总场电压（ U' ），其中一次场为没有极化效应时的电场，总场为受到极化效应影响的电场。

由于供入电流一致为 I ，根据欧姆定律有式 4.7。

$$\begin{aligned} U &= IR \\ U' &= IR' \end{aligned} \tag{4.7}$$

根据上一节的推导，没有受到极化效应的横向电阻和电阻率如式 4.1 和 4.3 所示，纵向电阻和电阻率如式 4.5 和 4.6 所示。

同理，受到激发极化效应影响的横向电阻和电阻率分别如 4.8 和 4.9 所示。

$$R'_{eqL} = \frac{b}{a \sum \frac{h_i}{\rho_i}} \tag{4.8}$$

$$\rho'_L = \frac{\sum h_i}{\sum \frac{h_i}{\rho_i}} \tag{4.9}$$

纵向电阻和电阻率分别如 4.10 和 4.11 所示。

$$R'_{eqT} = \frac{\sum \rho'_i h_i}{ab} \tag{4.10}$$

$$\rho'_T = \frac{\sum \rho'_i h_i}{\sum h_i} \tag{4.11}$$

对于每一层介质，有式 4.12。

$$\rho'_i = \frac{\rho_i}{1 - m_i} \quad 4.12$$

当从垂向测量时，结合极化率的定义,得到式 4.13。

$$m_T = \frac{U_T' - U_T}{U_T'} \quad 4.13$$

结合式 4.7，并消去电流项 I 得到式 4.14。

$$m_T = \frac{R_T' - R_T}{R_T'} \quad 4.14$$

将式 4.5、4.10 和式 4.12 带入上式得到纵向极化率的表达式为式 4.15。

$$m_T = 1 - \frac{\sum \rho_i h_i}{\sum \frac{\rho_i}{1 - m_i} h_i} \quad 4.15$$

从其表达式可以看出，宏观上纵向极化率不仅与各个薄层的极化率 m_i 和厚度 h_i 有关，也与薄层的电阻率 ρ_i 有关，与宏观纵向电阻率类似，纵向极化率与薄层的长度和宽度无关。

当从横向测量时，类比式 4.14，有式 4.16

$$m_L = \frac{R_L' - R_L}{R_L'} \quad 4.16$$

其中 R_L 和 R_L' 分别如式 4.1 和 4.8 所示，同样将他们与式 4.12 带入上式得到横向极化率的表达式 4.17。

$$m_L = 1 - \frac{\sum \frac{h_i}{\rho_i} (1 - m_i)}{\sum \frac{h_i}{\rho_i}} \quad 4.17$$

同样，宏观上横向极化率与薄层的极化率 m_i 和厚度 h_i 以及电阻率 ρ_i 有关，与薄层的长度和宽度无关。

至此，本节推导出了薄互层各向同性介质宏观各向异性的表达式，也从理论上证明了极化率宏观各向异性的存在。

4.2 激发极化法各向异性反常现象的证明

Liu^[48,80]使用有限体积法实现了三维时间域激发极化法的正演模拟，在其文章中给出的模拟结果观察到了与电阻率各向异性介质类似的各向异性反常现象，本节通过公式推导，来分析时间域激发极化法中的这种现象。

4.2.1 点源场各向异性介质均匀半空间解析解

进行直流电场以及激发极化法分析的基础是点源场的求解。Li and Uren^[73]已经给出了点源均匀半空间各向异性介质的空间电位解,本报告在此给出简单的证明。

当均匀半空间介质为各向同性,并且电阻率为 ρ_0 时,根据镜原理可以得到在 $r_0(x_0, y_0, z_0)$ (r_0 在介质中) 供入电流 I_0 , 在 $r(x, y, z)$ 处的电位如式 4.18 所示。

$$v(r) = \frac{I_0 \rho_0}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R'_0} \right) \quad 4.18$$

此处 $R_0 = |r - r_0|$, $R'_0 = |r - r'_0|$, $r'_0(x_0, y_0, -z_0)$, 其中 r'_0 即为镜像源的位置。

当介质为各向异性时,电阻率可以由式 4.19 描述。

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix} \quad 4.19$$

这时,镜像源的位置为 $r'_0(x', y', z')$, Li and Uren^[81]给出了此时计算镜像源位置的公式,如式 4.20 所示。

$$\begin{aligned} x' &= 2z_0 r_1 + x_0 \\ y' &= 2z_0 r_2 + y_0 \\ z' &= -z_0 \end{aligned} \quad 4.20$$

其中 r_1 和 r_2 如式 4.21 所示。

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\rho_{22}\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{22}\rho_{11} - \rho_{12}^2} \\ r_2 &= \frac{\rho_{11}\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{22}\rho_{11} - \rho_{12}^2} \end{aligned} \quad 4.21$$

此时在 $r(x, y, z)$ 处的电位表达式如式 4.22 所示。

$$v(r) = \frac{I_0 |\boldsymbol{\rho}_0|^{1/2}}{4\pi} \left(\frac{1}{AD_0} + \frac{1}{AD'_0} \right) \quad 4.22$$

其中 $AD_0 = \sqrt{B} = \sqrt{(r - r_0)^T \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \cdot (r - r_0)}$, 叫做各向异性距离(anisotropic distance)^[40]。这个距离的定义包含了各向异性介质的影响,与传统的距离定义不同。 AD'_0 是镜像源与测量点的各向异性距离。

在地面直流电阻率法中,一般将源放在地表,即 $z_0 = 0$,根据式 4.20,此时镜像源的位置与源的位置重合,所以式 4.22 可以简化为式 4.23。

$$v = \frac{I|\rho_0|^{1/2}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{B}} \quad 4.23$$

所以直流电阻率法中，点源均匀半空间各向异性介质的解析解即为式 4.23。

4.2.2 直流电阻率法中的各向异性反常现象

假设点源的位置为 $\mathbf{r}_0 = (0,0,0)$ ，供入电流为 I ，式 4.23 中 B 可以简化为式 4.24。

$$B = \sqrt{\mathbf{r}^T \cdot \rho_0 \cdot \mathbf{r}} \quad 4.24$$

当介质电阻率的电性主轴与坐标轴一致时，即均匀半空间的介质电阻率为 $\rho_0 = \rho_x/\rho_y/\rho_z$ ，式 4.23 可以简化为式 4.25。

$$v = \frac{I\sqrt{\rho_x\rho_y\rho_z}}{2\pi\sqrt{\rho_x x^2 + \rho_y y^2 + \rho_z z^2}} \quad 4.25$$

由于地面直流电阻率法在地表进行测量，所以 $z = 0$ ，电位表达式可以写为式 4.26。

$$v = \frac{I\sqrt{\rho_x\rho_y\rho_z}}{2\pi\sqrt{\rho_x x^2 + \rho_y y^2}} \quad 4.26$$

对方位各向异性介质，当 x - y 平面的电阻率一致为 ρ_L ， z 方向的电阻率为 ρ_T 时，均匀半空间介质的电阻率可以写为 $\rho_0 = \rho_L/\rho_L/\rho_T$ ，此时介质也叫做 VTI 介质，式 4.26 可以写为式 4.27。

$$v = \frac{I\sqrt{\rho_L\rho_T}}{2\pi\sqrt{(x^2 + y^2)}} \quad 4.27$$

对比各向同性介质均匀半空间的解析解，公式 4.27 是均匀半空间电阻率为 $\rho = \rho_m = \sqrt{\rho_L\rho_T}$ 时的解析解，即对于 VTI 介质的各向异性均匀半空间，当我们在地表进行测量时，不能得到各向异性介质的信息，测量结果为介质的平均电阻率。

对方位各向异性介质，当 x - z 平面的电阻率一致为 ρ_L ， y 方向的电阻率为 ρ_T 时，均匀半空间介质的电阻率可以写为 $\rho_0 = \rho_L/\rho_T/\rho_L$ ，此时介质也叫做 HTI 介质，式 4.26 可以写为式 4.28。

$$v = \frac{I\sqrt{\rho_L^2\rho_T}}{2\pi\sqrt{\rho_Lx^2 + \rho_Ty^2}} \quad 4.28$$

在地表测量并且测量电极沿着 x 方向排列时，即测量位置为 $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ ，式 4.28 可以简化为 4.29。

$$v_x = \frac{I\sqrt{\rho_L\rho_T}}{2\pi x} \quad 4.29$$

式 4.29 也可以理解为均匀半空间各向同性介质电阻率为 $\rho = \rho_m = \sqrt{\rho_L\rho_T}$ 时，沿着 x 方向测量得到的电位，所以此时计算得到的视电阻率为 ρ_m ，但是该模型下 x 方向的真电阻率为 ρ_L ，与计算结果得到的平均电阻率 ρ_m 不符。

同时我们考虑如果测量电极在地表沿着 y 方向排列，即测量位置为 $\mathbf{r} = (0, y, 0)$ ，式 4.28 可以简化为式 4.30。

$$v_y = \frac{I\rho_L}{2\pi y} \quad 4.30$$

式 4.30 为均匀半空间各向同性介质电阻率为 ρ_L 时的电位表达式，此时计算得到的视电阻率为 ρ_L ，但是模型介质中 y 方向的真电阻率为 ρ_T ，与计算得到的视电阻率不符。以上描述的沿着两个方向测量得到的电阻率与介质在这两个方向的真实电阻率不符的情况叫做各向异性反常现象^[1,34,82]。

4.2.3 时间域激发极化法中的各向异性反常现象

为了简化问题，本报告仅考虑主轴各向异性，假设极化率的各向异性主轴与电阻率的各向异性主轴一致，并且电性主轴与坐标系平行，与电阻率类似此时极化率可以表达为 $\boldsymbol{\eta} = \eta_x/\eta_y/\eta_z$ ，视极化率可以通过式 4.31 计算得到^[52]。

$$\eta = \frac{v_t - v_1}{v_t} \quad 4.31$$

其中 v_1 是一次场，没有受到激发极化效应影响的电位， v_t 是总场，受到激发极化效应影响的电位。对于 VTI 介质，极化率可以表达为 $\boldsymbol{\eta} = \eta_L/\eta_L/\eta_T$ ，一次场 v_1 的结果如式 4.27 所示，总场 v_t 根据式 4.27 可以写为式 4.32。

$$v_t = \frac{I\sqrt{\rho'_L \cdot \rho'_T}}{2\pi\sqrt{(x^2 + y^2)}} \quad 4.32$$

其中 $\rho'_L = \rho_L/(1 - \eta_L)$ ， $\rho'_T = \rho_T/(1 - \eta_T)$ 将式 4.27 和式 4.32 带入式 4.31，

可以得到视极化率的表达式为式 4.33。

$$\eta = \frac{\sqrt{\rho'_L \cdot \rho'_T} - \sqrt{\rho_L \cdot \rho_T}}{\sqrt{\rho'_L \cdot \rho'_T}} \quad 4.33$$

式 4.33 可以简化为式 4.34。

$$\eta = \eta_m = 1 - \sqrt{(1 - \eta_L)(1 - \eta_T)} \quad 4.34$$

式 4.34 表明,对于 VTI 介质,在地表进行测量得到的视极化率是一个常数,类比于电阻率各向异性,我们称这个常数为平均极化率 η_m 。同时与电阻率类似,对于 VTI 介质的各向异性均匀半空间,当在地表进行测量时,也不能得到各向异性介质的信息。

对于 HTI 介质,极化率可以写为 $\eta = \eta_L/\eta_T/\eta_L$,此时一次场 v_1 的结果如式 4.28 所示,总场 v_t 根据式 4.28 可以写为式 4.35。

$$v_t = \frac{I\sqrt{(\rho'_L)^2\rho'_T}}{2\pi\sqrt{\rho'_L x^2 + \rho'_T y^2}} \quad 4.35$$

将式 4.28 和 4.35 带入 4.31,得到 HTI 视极化率的表达式如式 4.36 所示。

$$\eta = 1 - \frac{\sqrt{\rho_L^2\rho_T(\rho'_L x^2 + \rho'_T y^2)}}{\sqrt{(\rho'_L)^2\rho'_T(\rho_L x^2 + \rho_T y^2)}} \quad 4.36$$

当在地表测量并且测量电极沿着 x 方向排列时,测量位置为 $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$,式 4.36 可以写为式 4.37。

$$\eta_x = 1 - \sqrt{\frac{\rho_L^2\rho_T\rho'_L}{(\rho'_L)^2\rho'_T\rho_L}} \quad 4.37$$

化简得到式 4.38。

$$\eta_x = \eta_m = 1 - \sqrt{(1 - \eta_L)(1 - \eta_T)} \quad 4.38$$

即此时的视极化率为平均极化率 η_m ,与模型 x 方向的真极化率为 η_L 不同,这个现象与直流电法的结果类似。

当在地表测量并且测量电极沿着 y 方向排列时,视极化率式 4.36 可以写为式 4.39。

$$\eta_y = 1 - \sqrt{\frac{\rho_L^2 \rho_T \rho_T'}{(\rho_L')^2 \rho_T' \rho_T}} \quad 4.39$$

化简得到式 4.40。

$$\eta_y = \eta_L \quad 4.40$$

即测量得到的视极化率为 η_L ，与 y 方向的真极化率为 η_T 不同。这个现象也与直流电法的结果类似。以上描述的沿着两个方向测量得到的视极化率与介质在这两个方向的真极化率不符的情况叫做极化率的各向异性反常现象。

至此，本节完成了对极化率各向异性反常现象的公式证明，本报告将在后面通过数值模拟进行验证。

4.3 时间域激发极化法数值模拟

时间域激发极化法的正演主要根据式 4.31^[52]，可写为式 4.41。

$$\eta_a = \frac{\varphi_t - \varphi_1}{\varphi_t} \quad 4.41$$

也可写为式 4.42。

$$\eta_a = W * \frac{F_{DC}[\boldsymbol{\rho} \cdot [\mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}]^{-1}] - F_{DC}[\boldsymbol{\rho}]}{F_{DC}[\boldsymbol{\rho} \cdot [\mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}]^{-1}]} \quad 4.42$$

其中 W 为勘探装置对应的节点选择矩阵， F_{DC} 为直流电阻率法的正演算子，从式 4.42 可以看出时间域激发极化法的正演需要进行两次直流电阻率法的正演计算，即分别计算一次场和总场，所以极化率的正演问题其核心为直流电阻率法的正演。

在各向异性正演中，计算一次场时介质电阻率为张量 $\boldsymbol{\rho}$ ，计算总场时介质电阻率为张量 $\boldsymbol{\rho} \cdot [\mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}]^{-1}$ 。

点源的正演问题如第二章 2.3 节中所述。

4.4 时间域激发极化法正演模拟分析

本节通过算例分析，来讨论时间域激发极化法和直流电阻率法的响应特点。

4.4.1 均半空间模型

为了研究在地表测量时视电阻率的特点，我们假设均匀半空间的电阻率为

$\rho_0 = 0.5/0.5/2.0 \Omega \cdot m$ ，供电电极和测量电极如图 4.3 所示，图中红色实心点为源点，向地下供入 1A 的电流，其余 41 个黑色实心圆为测量电极的位置，均匀的分布在以点源为圆心，半径 1m 的圆上。

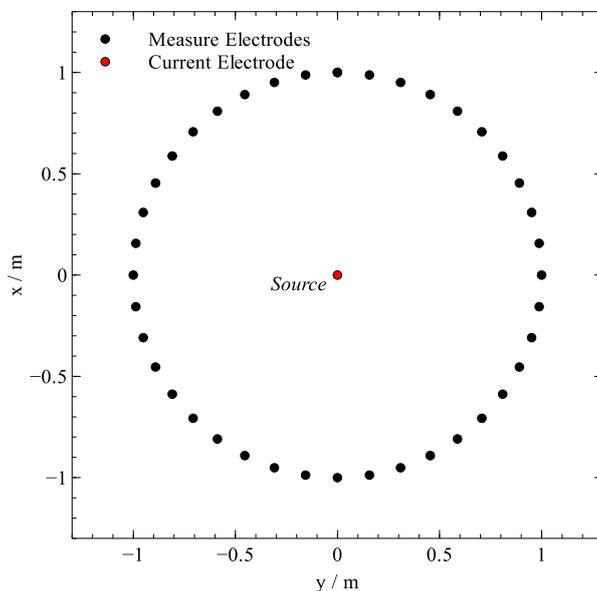


图 4.3 电极分布示意图

Fig 4.3 The electrodes distribution above the azimuthal anisotropy half space

当欧拉角 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 时，分别计算当 $\alpha = 0^\circ/30^\circ/90^\circ$ 时在图 4.3 所示的电极上测量得到二极装置的视电阻率结果，并且以视电阻率值作为到圆心的距离在 x-y 平面上绘制成图，结果如图 4.4 所示。

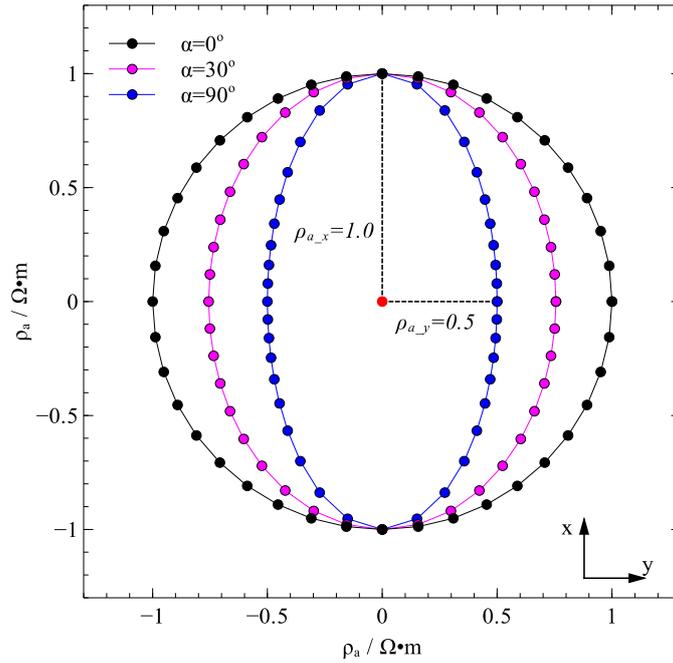


图 4.4 视电阻率模拟结果

Fig 4.4 Apparent resistivity of pole-pole array

当 $\alpha = 0^\circ$ 时介质为 VTI 介质，测量结果如图 4.4 中的黑色实心点所示，视电阻率为半径等于 1 的圆，即视电阻率为介质的平均电阻率 $1.0\Omega \cdot m$ ，此时测量结果不能反映地下介质的各向异性信息。当 $\alpha = 90^\circ$ 时，为 HTI 介质，可以视为 $\rho_0 = 0.5/2.0/0.5 \Omega \cdot m$ ，其测量结果为椭圆（图 4.4 中的蓝色实心点），且长轴为沿着 x 方向测量的视电阻率 $\rho_{a_x} = \rho_m = 1.0\Omega \cdot m$ ，短轴为 y 方向测量的视电阻率 $\rho_{a_y} = \rho_L = 0.5\Omega \cdot m$ ，这个结果与上文的推导是一致的。当 $\alpha = 30^\circ$ 时，结果如图 4.4 中紫色的实心点，其结果在 $\alpha = 0^\circ$ 与 $\alpha = 90^\circ$ 之间。

假设均匀半空间三个电性主轴方向的极化率为 $\eta_0 = 0.1/0.1/0.6$ ，与视电阻率测量采用同样的参数模拟当欧拉角 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 时分别计算 $\alpha = 0^\circ/30^\circ/90^\circ$ 时的视极化率，结果如图 4.5 所示。

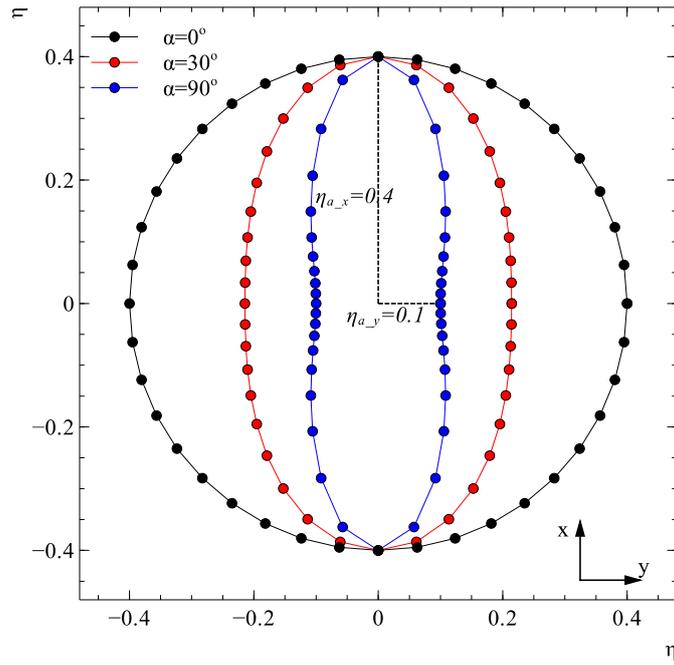


图 4.5 视极化率模拟结果

Fig 4.5 Apparent chargeability of pole-pole array

对比图 4.4 和图 4.5 可以发现,视极化率的结果与视电阻率的结果非常相似,与上文关于 TDIP 各向异性的推导结论也是相符的。当 $\alpha = 90^\circ$ 时,为 HTI 介质, x 方向测量结果为 $\eta_x = 1 - \sqrt{(1 - 0.1)(1 - 0.6)} = 0.4$, y 方向为 $\eta_y = 0.1$ 。

为了观察平均电阻率和平均极化率的特点,我们假设两个方向的电阻率 ρ_L 和 ρ_T 均在 0~1 范围变化,得到 ρ_L , ρ_T 与平均电阻率 ρ_m 之间的变化关系如图 4.6 所示。

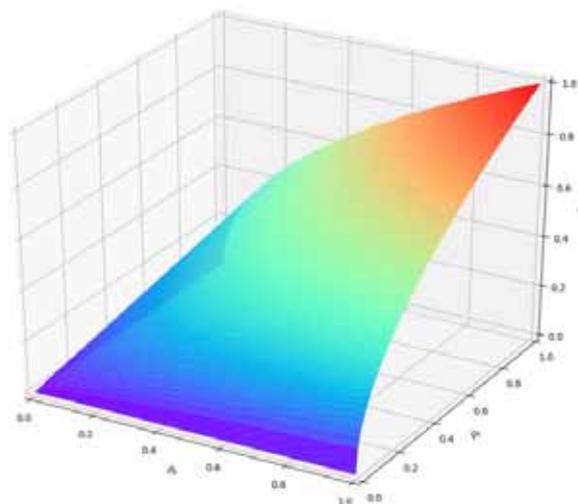


图 4.6 平均电阻率与水平和垂直电阻率之间的关系

Fig 4.6 Mean resistivity varies with ρ_L and ρ_T when normalize the resistivity

同样，根据式 4.38 可以得到 η_L 、 η_T 与平均极化率 η_m 之间的关系如图 4.7 所示。

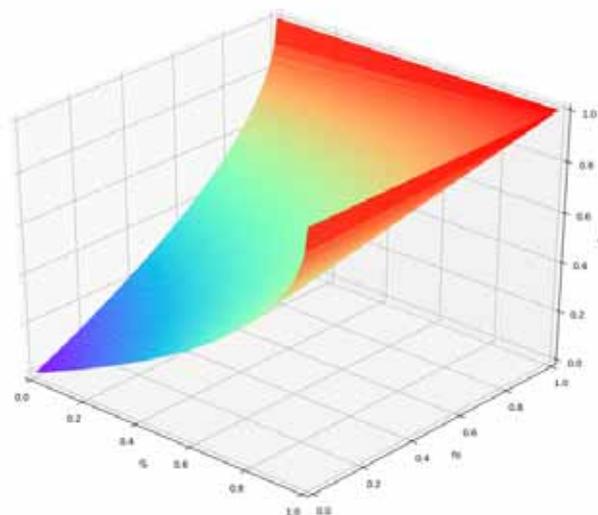


图 4.7 平均电阻率与水平和垂直极化率之间的关系

Fig 4.7 Mean chargeability varies with η_L and η_T

从图 4.6 和图 4.7 我们可以发现，平均电阻率总是接近横、纵向电阻率中较小的值，而平均极化率总是接近横、纵向极化率中更大的值。

4.4.2 两层各向异性模型

为了进一步研究各向异性反常现象，我们使用有限单元法模拟图 4.8 所示的

两层模型。图中第一层为各向异性介质，电性主轴与坐标系主轴平行，且三个方向的电阻率为 $\rho_x/\rho_y/\rho_z = 50/50/200 \Omega \cdot m$ ，极化率为 $\eta_x/\eta_y/\eta_z = 0.1/0.1/0.3$ ，厚度为 5m，基底为各向同性介质，电阻率为 $10 \Omega \cdot m$ 极化率为 0.6， φ 为方位角。点源在坐标原点处，向地下供入 1A 的电流，测量电极与点源的距离为从 0.1 ~ 316m 之间对数等间距分布的 50 个极距(生成网格的 Gmsh 代码如附录 B 所示)。

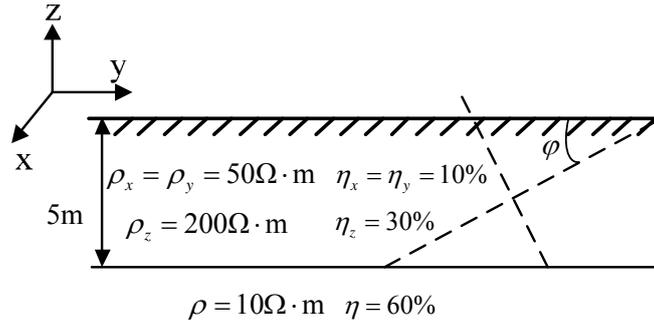


图 4.8 两层模型

Fig 4.8 A two-layered model with an anisotropic covering layer over an isotropic half-space

假设第一层介质的欧拉角 ψ 、 χ 为 0° ，然后分别计算 φ 为 $0^\circ/30^\circ/45^\circ/90^\circ$ 时，沿着 x 和 y 方向测量二极装置不同极距的测量结果，视电阻率曲线如图 4.9 所示，视极化率曲线如图 4.10 所示。

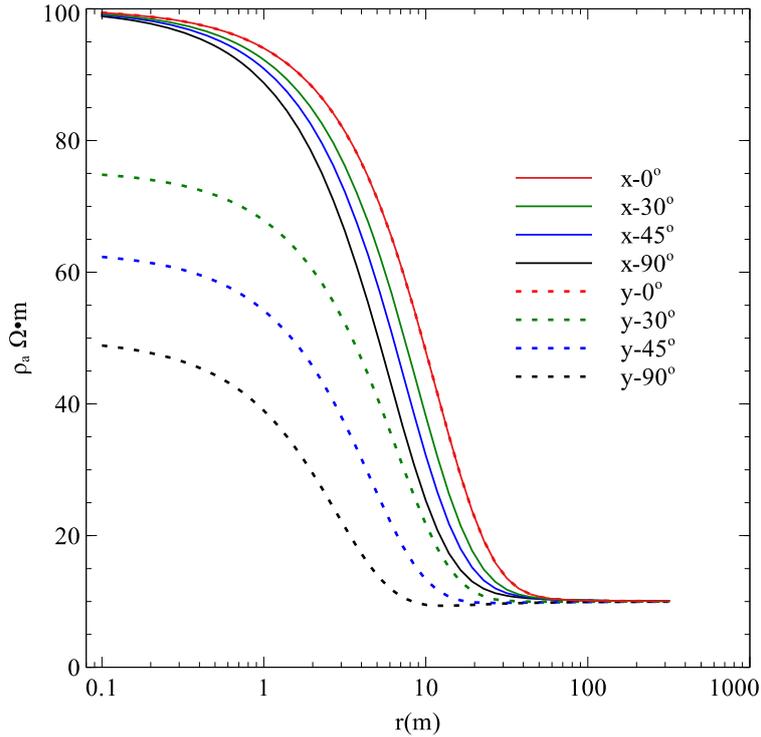


图 4.9 沿 x 和 y 方向测量的视电阻率曲线

Fig 4.9 Apparent resistivities along x and y direction for pole-pole array with different Euler angles.

从图 4.9 中可以发现，当极距较大时视电阻率反映的是基底的电性，测量曲线接近基底的电阻率 $10 \Omega \cdot m$ ，当极距变小时第一层各向异性介质对视电阻率的影响越来越大。

当 $\varphi = 0^\circ$ 时，测量极距较小时，无论从 x 和 y 方向测量结果均接近第一层的平均电阻率 $\rho_a \approx \sqrt{\rho_x \cdot \rho_z} = 100 \Omega \cdot m$ ，这与前文式 4.27 的结果是一致的。

当 $\varphi = 90^\circ$ 且极距较小时，沿 x 方向测量的视电阻率接近第一层的平均电阻率 $\rho_{a_x} = 100.0 \Omega \cdot m$ ，x 方向的真电阻率为 $\rho_{a_y} = \rho_L = 50 \Omega \cdot m$ ，沿 y 方向测量的视电阻率接近 $\rho_{a_y} = \rho_L = 50 \Omega \cdot m$ ，而此时 y 方向的真电阻率为 $200 \Omega \cdot m$ ，这业也与前文的推导结果一致。

当 $\varphi = 30^\circ / 45^\circ$ 时，测量结果总是在 $\varphi = 0^\circ$ 和 $\varphi = 90^\circ$ 之间。

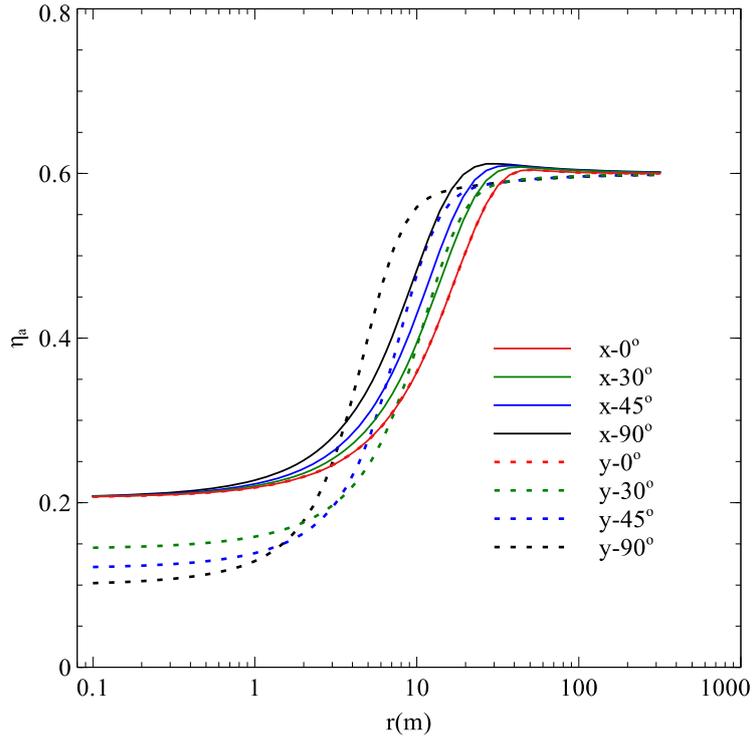


图 4.10 沿 x 和 y 方向测量的视极化率曲线

Fig 4.10 Apparent chargeability along x and y direction for pole-pole array with different Euler angles.

与视电阻率的结果类似，图 4.10 的模拟结果显示当极距较大时反映的是基底的电性，测量曲线接近基底的极化率 0.6，当极距变小时第一层各向异性介质对视极化率的影响越来越大。

沿着 x 方向测量，其结果受 α 角度影响不大，与电阻率的测量特点相似。当极距较小 $\alpha = 90^\circ$ ，此时第一层介质为 HTI 介质，根据以上的分析，沿 x 方向测量视极化率应该表现为平均极化率即 $\eta_x = 1 - \sqrt{(1 - \eta_L)(1 - \eta_T)} = 1 - \sqrt{(1 - 0.1)(1 - 0.3)} = 0.206$ ，与图 4.10 的结果是吻合的，沿 y 方向测量的结果（图中黑色点线），视极化率为 $\eta_y = \eta_L = 0.1$ ，也与前述结论相符，即时间域激发极化法中的各向异性反常现象。

4.4.3 含异常体二维模型

假设一个二维构造模型，其模型参数如图 4.11 所示。

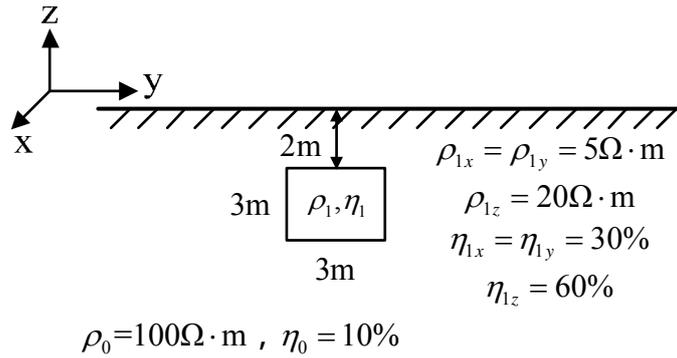


图 4.11 二维构造示意

Fig 4.11 2-D model with an anomalous body

视电阻率以及视极化率的模拟结果如图 4.12 所示。

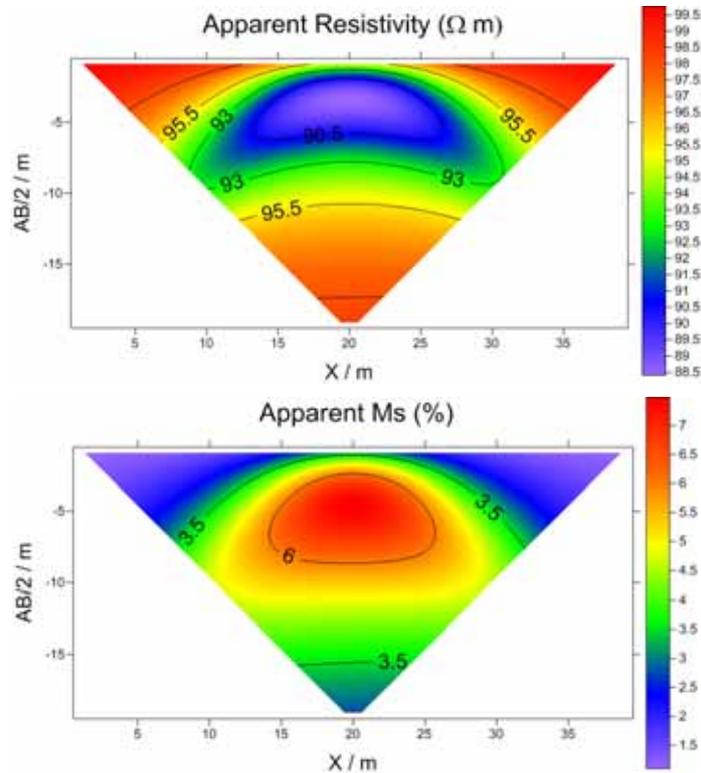


图 4.12 视极化率和视电阻率模拟结果

Fig 4.12 Apparent resistivity and apparent chargeability pseudo-sections for model shown in

fig.4.11

如图 4.11 所示的模型（命名为模型 M1），其它参数不变，当异常体的极化率为其平均极化率 $\eta_m = 47\%$ 时（命名为模型 M2），取视极化率模拟结果中 $x=20$ （横坐标）的测深点进行对比，如所图 4.13 示。

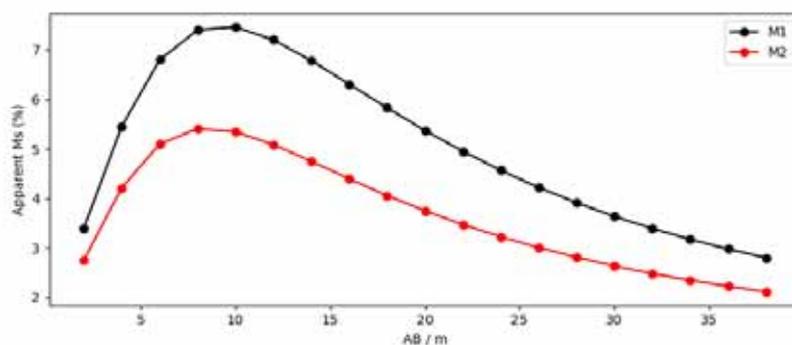


图 4.13 $x=20$ 视极化率曲线

Fig 4.13 Apparent chargeability curves while $x=20$

当 $AB=10$ 时，对比两个模型的测深曲线，如图 4.14 所示。

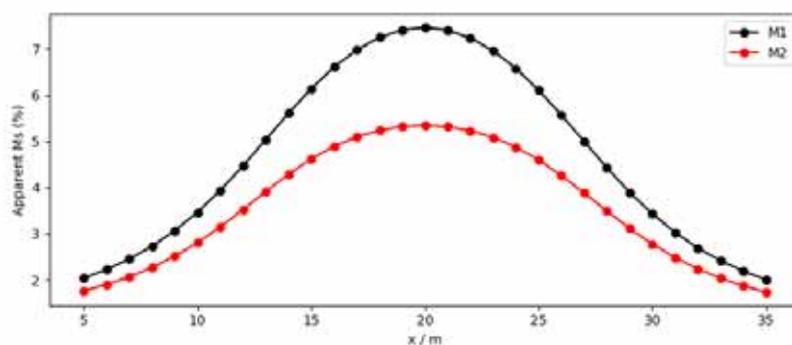


图 4.14 $AB=10$ 视极化率曲线

Fig 4.14 Apparent chargeability curves while $AB=10$

以上结果均显示了极化率各向异性对模拟结果的影响，也说明了在勘探中不能忽略极化率的各向异性。

4.4.4 含异常体三维模型

含立方体异常的三维模型如图 4.15 所示。

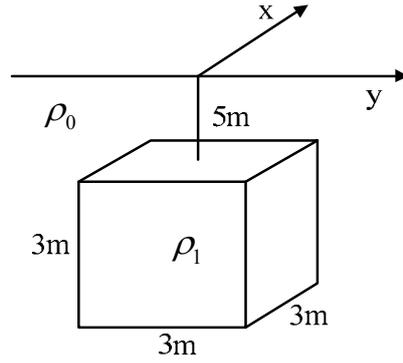
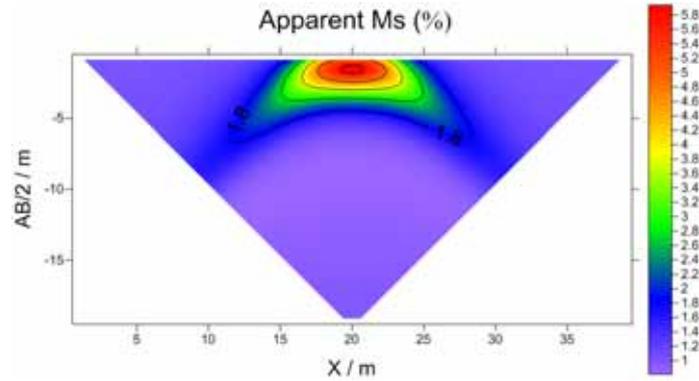


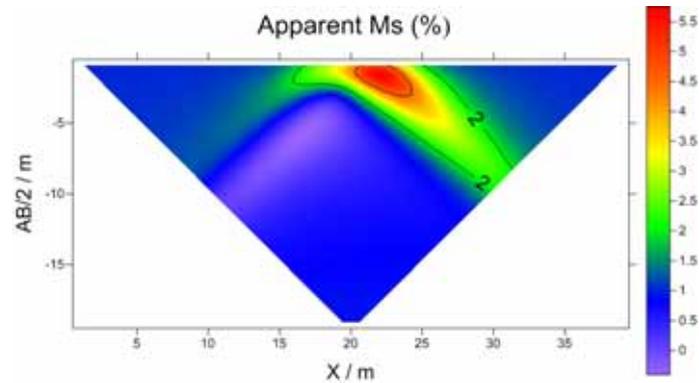
图 4.15 三维含立方体模型

Fig 4.15 Model with anomalous cube

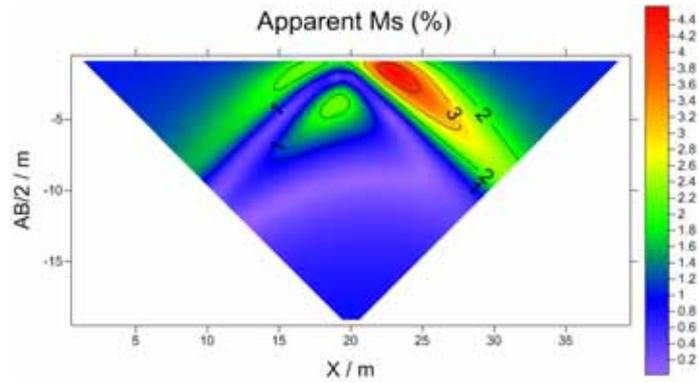
背景为各向同性介质 $\rho_0 = 10\Omega \cdot m, \eta_0 = 1\%$ ，异常体的电阻率为 $\rho_{1x} = \rho_{1y} = 100\Omega \cdot m$ ， $\rho_{1z} = 500\Omega \cdot m$ ，极化率为 $\eta_{1x} = \eta_{1y} = 60\%$ ， $\eta_{1z} = 30\%$ ，倾角 $\varphi = \chi = 0^\circ$ ，模拟当 ψ 为 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 以及 90° 时的二极装置的测量结果。视极化率剖面如图 4.16 所示。



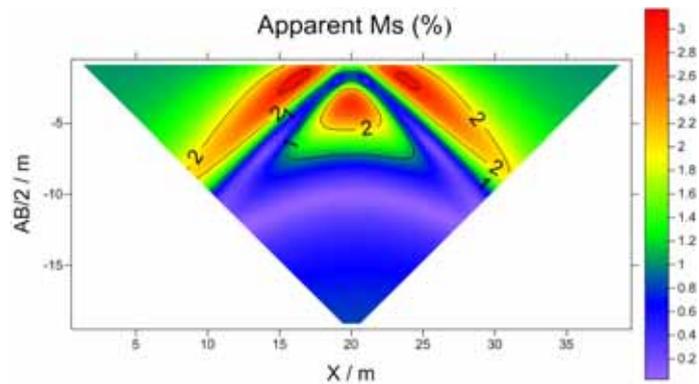
(a) $\psi = 0^\circ$



(b) $\psi = 30^\circ$



(c) $\psi = 60^\circ$

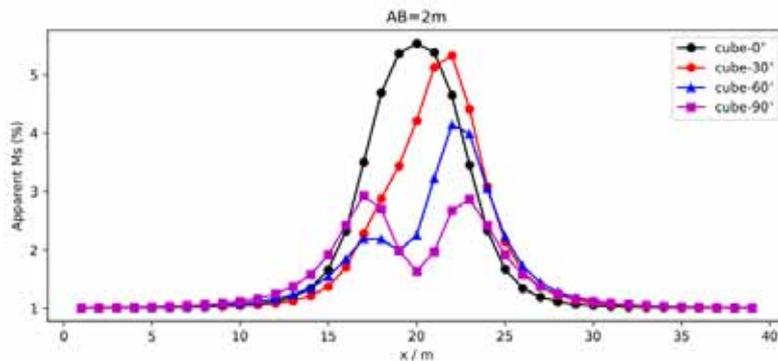


(d) $\psi = 90^\circ$

图 4.16 不同角度极化率模拟结果

Fig 4.16 Apparent chargeability pseudo-sections while $\psi = 0^\circ/30^\circ/60^\circ/90^\circ$ respectively

如图 4.16 所示，高级化的各向异性异常体随着 ψ 角度的变化在视极化率图中也呈现一定的角度，也就说明了介质倾角对极化率模拟的影响。异常体 $x-y$ 平面的极化率相同，当倾角 $\psi = 90^\circ$ 时，异常体为 HTI，此时观测坐标系的 $x-z$ 平面极化率时相同的，由于模型具有对称性，所以其视极化率曲线关于测线中心是对称的，如图 4.17 所示。



(a) $AB=2m$

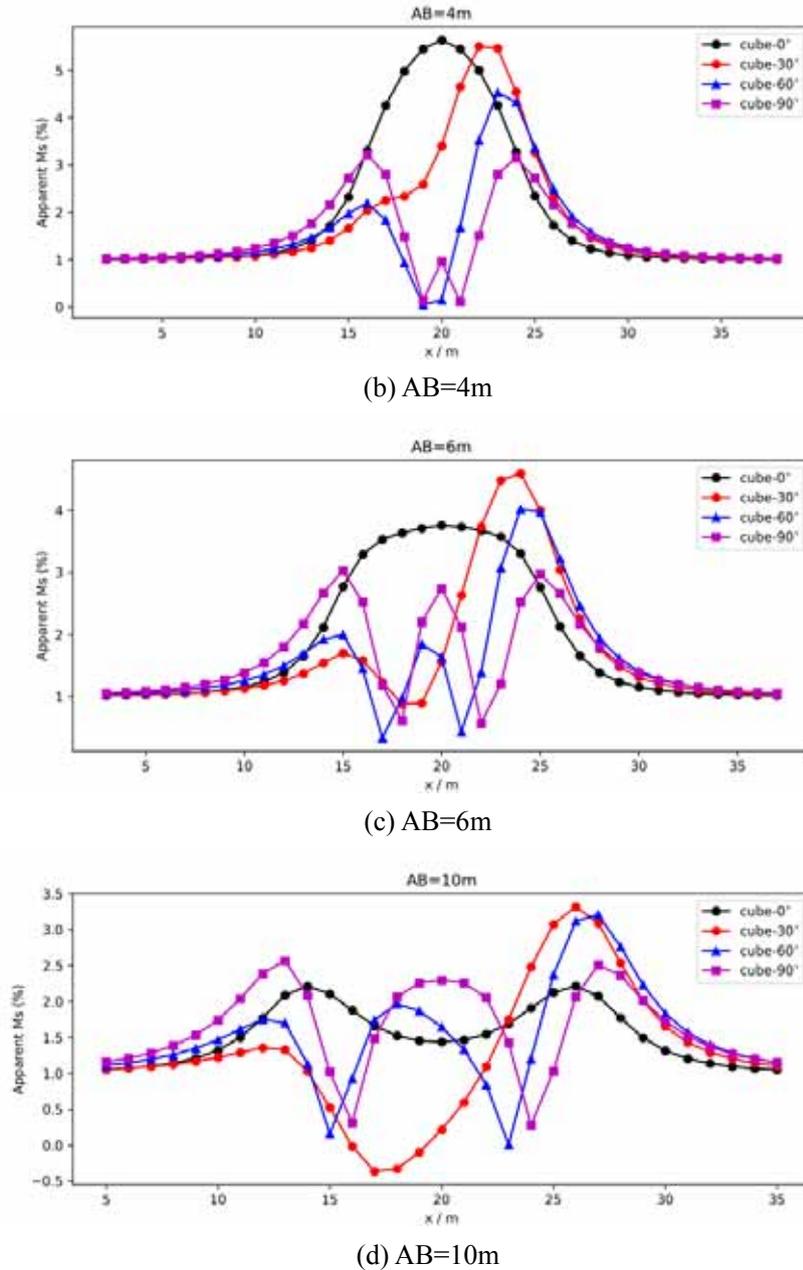


图 4.17 不同极距模拟结果对比

Fig 4.17 Apparent chargeability curves while AB=2/4/6/10m

从以上不同极距的曲线图对比可以发现类似的结论，因为 $\psi = 0^\circ$ 和 $\psi = 90^\circ$ 的模型关于 x 轴对称，所以其视极化率曲线也是对称的，相对于 $\psi = 0^\circ$ 的模型，异常体的倾角使测深曲线产生了畸变，与原始模型的视极化率测深曲线和视极化率剖面相差较大。

4.4.5 极化率负值的分析

在实际资料采集中，视极化率负值已经被观测到^[51,58]，在实际资料处理中一

般将其当作畸变点作剔除处理^[59]，但在一定的地电结构下视极化率是可能为负的。前人学者分别通过数值模拟和物理实验研究了视极化率负值出现的条件^[49,59,60]。但是他们的研究均是基于电性各向同性介质的假设，而通过本报告的分析实际介质往往是各向异性的。本节从数值模拟的角度分析极化率的负值现象。

设置一个两层模型，模型参数如图 4.18 所示，点源在坐标原点处，向地下供入 1A 的电流，测量电极与点源的距离为从 0.1 ~ 316m 之间对数等间距分布的 50 个极距。假设第一层介质的欧拉角 ψ 、 χ 为 0° ，然后分别计算 φ 为 $0^\circ/30^\circ/45^\circ/90^\circ$ 时，沿 x 和 y 方向测量，二极装置不同极距的测量结果，视极化率曲线如图 4.19 所示。

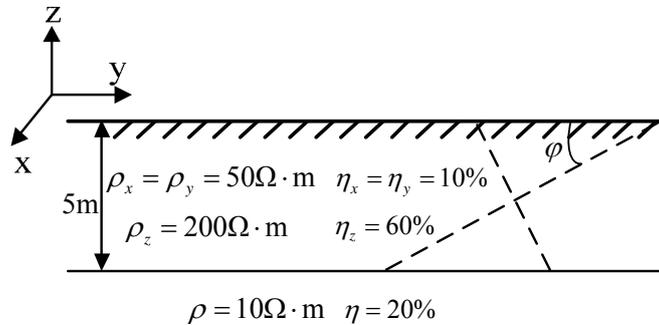


图 4.18 两层模型

Fig 4.18 A two-layered model with an anisotropic covering layer over an isotropic half-space

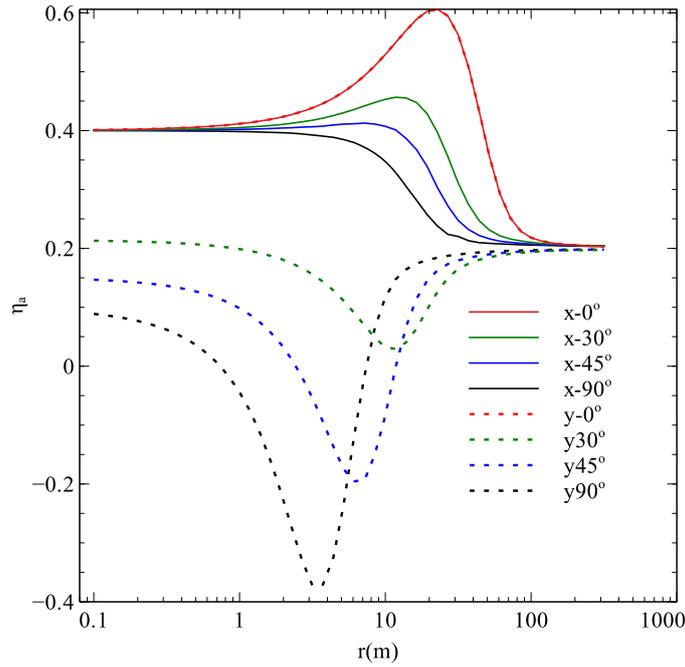
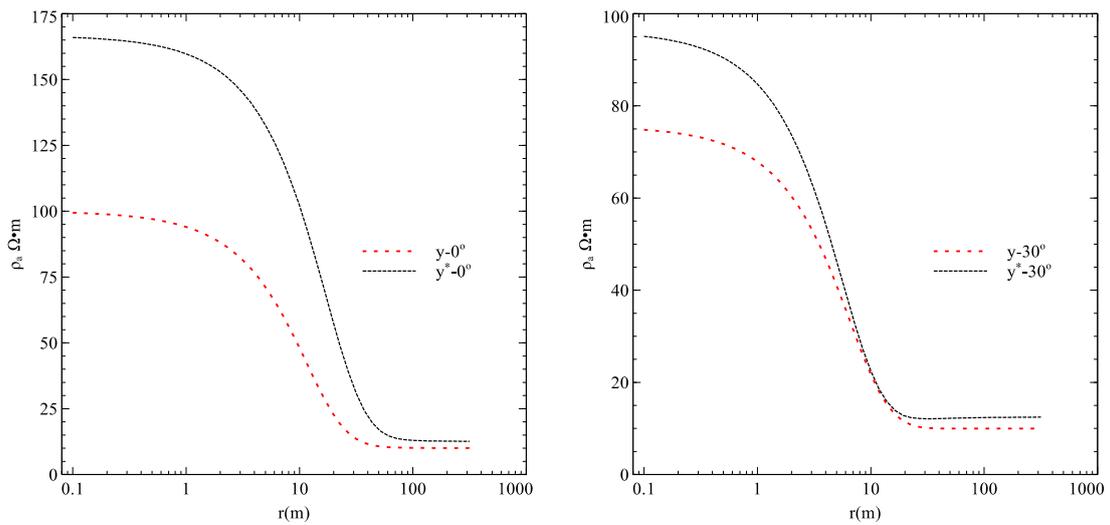


图 4.19 沿 x 和 y 方向测量的视极化率曲线对比

Fig 4.19 Apparent chargeability along x and y direction for pole-pole array with different Euler angles.

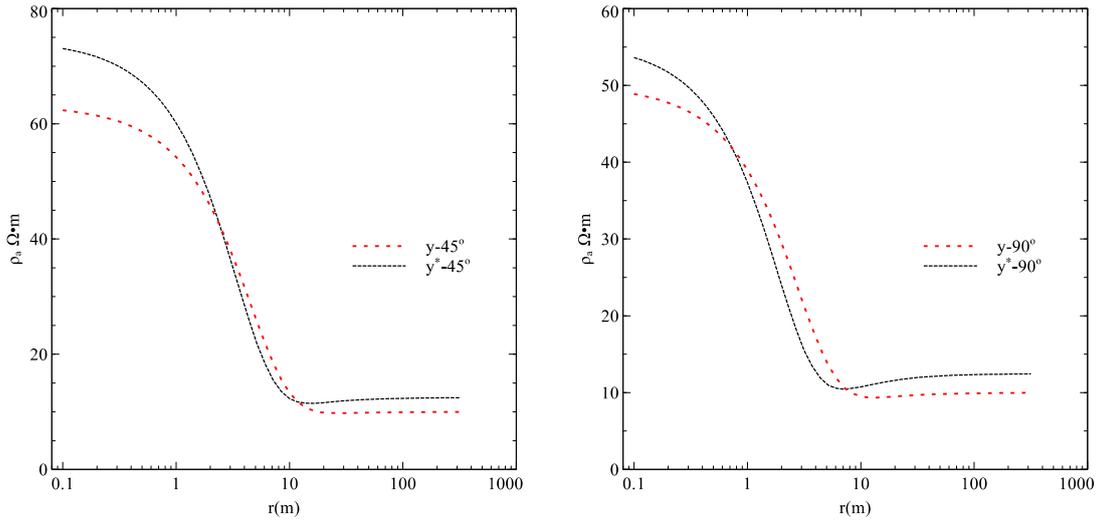
可以发现当沿着 x 方向测量时，无论 φ 角如何变化均不会出现负值，负值仅出现在 y 方向的测线上。

当沿着 y 方向测量，不同各向异性倾角模型一次场和总场的正演结果视电阻率曲线依次为对比如图 4.20 所示。



(1) $\varphi = 0^\circ$

(2) $\varphi = 30^\circ$



(3) $\varphi = 45^\circ$

(4) $\varphi = 90^\circ$

图 4.20 y 方向上是否考虑极化效应的正演结果曲线对比

Fig 4.20 Apparent resistivities along y direction for pole-pole array with and without IP effects.

对极化率的研究中，一般考虑极化效应后得到的视电阻率曲线（图中黑色曲线 y^* ）在不考虑极化效应的视电阻率曲线（图中红色曲线 y ）之上，但从模拟结果发现当倾角 $\varphi > 30^\circ$ 后，在极距 5m 附近红色曲线在黑色曲线之上（图 4.20 (3) (4)），观察式 4.41，这直接导致了计算得到的视极化率为负值，此时该极距下主要反应了图 4.18 模型中介质分界面部分的电性属性，推测是分界面部分对电流的反射导致了这个结果，这一结果与大地电磁一维正演中出现的现象非常相似。

如图 4.21 所示的地电模型，图 4.22 为 TE 模式的视电阻率和相位模拟结果。

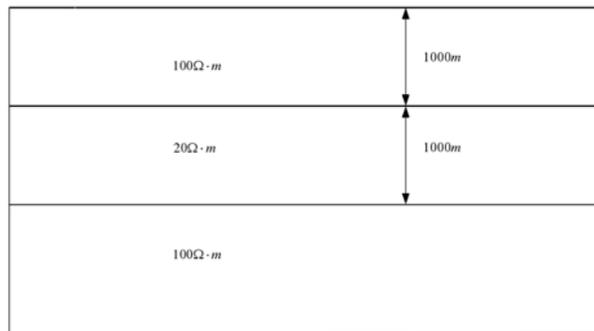


图 4.21 H 型地电模型

Fig 4.21

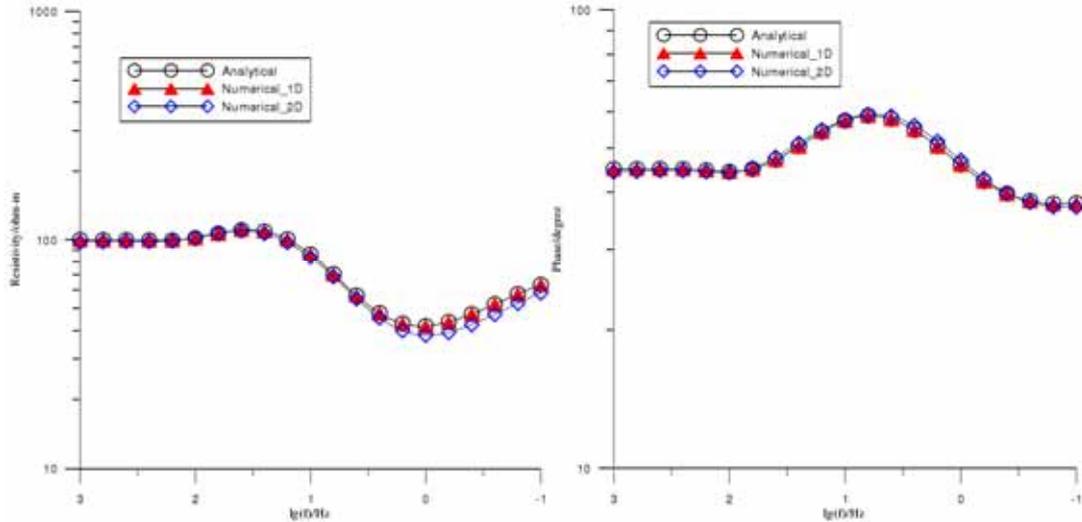


图 4.22 TE 模式视电阻率和相位

Fig 4.22 Apparent resistivities and phase for TE mode.

在图 4.22 中横坐标 1.5 附近，同样视电阻率出现了一个凸起，这也是由介质分界面反射电磁波造成的。

4.5 小结

本章首先通过对薄互层极化率各向同性介质的分析，推导了宏观极化率各向异性介质的表达式，也就证明了极化率宏观各向异性的存在，然后基于点源场均匀半空间各向异性介质的解析解，给出了直流电阻率法和时间域激发极化法各向异性反常现象的证明，通过推导和模拟分析，还得到以下结论。

1. 对于均匀半空间介质，当水平面 x-y 的电阻率与 z 方向不同时，在地表进行测量，无论从 x 还是 y 方向测量结果是一致的，并且其值等于均匀半空间的平均电阻率。

2. 对于均匀半空间介质，平面 x-z 的电阻率与 y 方向不同，当沿着 x 方向测量时，得到的视电阻率为平均电阻率，与 x 方向的真电阻率不同，当沿着 y 方向测量时，得到的视电阻率为 x 和 z 方向的电阻率。

3. 定义平均极化率计算公式为 $\eta_m = 1 - \sqrt{(1 - \eta_L)(1 - \eta_T)}$ 。

4. 平均极化率总是接近横、纵向极化率中更大的值，而平均电阻率接近横、纵向极化率中更小的值。

通过数值模拟研究了视极化率负值现象出现的原因是因为总场的视电阻率小于一次场的视电阻率，而产生这个现象的原因可能是介质分界面电流的反射。

第5章 结论和展望

本报告主要针对基于各向异性介质直流电阻率法和时间域激发极化法的正演问题以及响应特点进行了分析,取得了一些进展,总结如下:

1. 采用非结构网格实现了基于二次场法的 2.5 维、三维直流电阻率法各向异性介质的有限单元法正演模拟,算例表明二次场法的计算精度更高。

2. 通过模拟发现,直流电阻率法勘探中,介质横向电阻率的变化对测量的结果影响较大,而纵向电阻率对结果影响相对较小。二极和偶极偶极装置相比于对称四极装置对纵向电阻率的反映更加灵敏,并且对异常的位置和形态反映也更加准确,其中偶极偶极装置对纵向电阻率的变化最为灵敏。

3. 给出 2.5 维各向异性介质中电流密度的计算方式,并通过对总场和二次场的电流密度分析,解释了直流电阻率法不同装置下横、纵向电阻率异常灵敏度不同的原因。

4. 通过对薄互层极化率各向同性介质的分析,给出其宏观各向异性的属性表达式,也就证明了极化率宏观各向异性的存在。

5. 从点源场出发证明了直流电阻率法和极化率的各向异性反常现象,给出各向异性介质平均极化率的定义,并通过数值模拟进行验证。

6. 实现了基于非结构网格的时间域激发极化法各向异性介质的有限单元法模拟,并对视极化率负值现象进行了简单分析。

在文中还有许多没有能够完成的研究工作,也是今后的研究方向:

1. 研究总结各向异性介质中视极化率负值出现的条件和规律。
2. 直流电阻率法和极化率各向异性介质的反演研究。
3. 频率域激发极化法各向异性介质的模拟研究
4. 基于自适应策略的网格剖分技术。

参考文献

- [1] 傅良魁. 电法勘探教程. 北京: 地质出版社, 1983.
- [2] 李金铭. 地电场与电法勘探. 北京: 地质出版社, 2005.
- [3] Loke M H, Chambers J E, Rucker D F, et al. Recent developments in the direct-current geoelectrical imaging method. *Journal of Applied Geophysics*, 2013, 95: 135-156.
- [4] 赵国泽, 陈小斌, 汤吉. 中国地球电磁法新进展和发展趋势. *地球物理学进展*, 2007, (04): 1171-1180.
- [5] 张晓东, 方捷, 张定源 等. 激发极化法在东溪金矿接替资源勘查中的应用. *物探与化探*, 2017, 41(03): 445-451.
- [6] Revil A, Karaoulis M, Johnson T, et al. Review: Some low-frequency electrical methods for subsurface characterization and monitoring in hydrogeology. *Hydrogeology Journal*, 2012, 20(4): 617-658.
- [7] 李帝铨, 王光杰, 底青云 等. 大功率激发极化法在额尔古纳成矿带中段找矿中的应用. *地球物理学进展*, 2007, (05): 1621-1626.
- [8] 李术才, 刘斌, 李树忱 等. 基于激发极化法的隧道含水地质构造超前探测研究. *岩石力学与工程学报*, 2011, 30(07): 1297-1309.
- [9] 田明禛, 李术才, 刘斌 等. 多同性源激发极化法超前预报仪的设计与实验. *济南大学学报(自然科学版)*, 2016, 30(04): 263-269.
- [10] 聂利超, 李术才, 刘斌 等. 隧道含水构造频域激发极化法超前探测研究. *岩土力学*, 2012, 33(04): 1151-1160.
- [11] 徐磊, 张建清, 漆祖芳. 水工隧洞综合超前地质预报应用对比研究. *地球物理学进展*, 2018, 33(01): 411-417.
- [12] 刘路. 矿井直流电阻率法三维超前探测技术研究. 中国矿业大学, 2014.
- [13] 邓小康. 隧道直流电阻率法超前聚焦探测研究. 中南大学, 2013.
- [14] 刘斌. 基于电阻率法与激电法的隧道含水地质构造超前探测与突水灾害实

- 时监测研究. 山东大学, 2010.
- [15] 刘斌, 李术才, 李树忱 等. 隧道含水构造直流电阻率法超前探测研究. 岩土力学, 2009, 30(10): 3093-3101.
- [16] 王赟, 杨顶辉, 殷长春 等. 各向异性地球物理与矢量场. 科学通报, 2017, 62(23): 2595-2605.
- [17] Rücker C, Günther T, Spitzer K. Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography — I. Modelling. *Geophysical Journal International*, 2006, 166(2): 495-505.
- [18] Günther T, Rücker C, Spitzer K. Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography — II. Inversion. *Geophysical Journal International*, 2006, 166(2): 506-517.
- [19] Sasaki Y. 3-D resistivity inversion using the finite element method. *GEOPHYSICS*, 1994, 59(12): 1839-1848.
- [20] Loke M H, Barker R D. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method1. *Geophysical Prospecting*, 1996, 44(1): 131-152.
- [21] Ren Z, Tang J. 3D direct current resistivity modeling with unstructured mesh by adaptive finite-element method. *GEOPHYSICS*, 2010, 75(1): H7-H17.
- [22] 吴小平, 汪彤彤. 利用共轭梯度算法的电阻率三维有限元正演. 地球物理学报, 2003, (03): 428-432.
- [23] 熊彬, 阮百尧, 罗延钟. 复杂地形条件下直流电阻率异常三维数值模拟研究. 地质与勘探, 2003, (04): 60-64.
- [24] 刘洋. 基于非结构网格的电阻率三维正反演及其应用研究. 中国科学技术大学, 2016.
- [25] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社, 1994.
- [26] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 电阻率/激发极化率数据的二维反演程序. 物探化探计算技术, 1999, (02): 21-30.
- [27] 刘云, 宋滔, 王赟. 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率法有限元数值模拟.

- 地球物理学进展, 2014, (03): 1194-1200.
- [28] 徐世浙, 赵生凯. 二维各向异性地电断面大地电磁场的有限元法解法. 地震学报, 1985, (01): 80-90.
- [29] Zhou B, Greenhalgh M, Greenhalgh S A. 2.5-D/3-D resistivity modelling in anisotropic media using Gaussian quadrature grids. *Geophysical Journal International*, 2009, 176(1): 63-80.
- [30] 宋滔. 直流电阻率法 2.5 维、三维各向异性有限元数值模拟和反演研究. 中国科学院大学, 2017.
- [31] Yin C, Weidelt P. Geoelectrical fields in a layered earth with arbitrary anisotropy. *GEOPHYSICS*, 1999, 64(2): 426-434.
- [32] Yin C. Geoelectrical inversion for a one-dimensional anisotropic model and inherent non-uniqueness. *Geophysical Journal International*, 2000, 140(1): 11-23.
- [33] Yin C, Maurer H M. Electromagnetic induction in a layered earth with arbitrary anisotropy[J]. *GEOPHYSICS*, 2001, 66(5): 1405-1416.
- [34] Li Y, Spitzer K. Finite element resistivity modelling for three-dimensional structures with arbitrary anisotropy. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2005, 150(1-3): 15-27.
- [35] Lowry T, Allen M B, Shive P N. Singularity removal: A refinement of resistivity modeling techniques. *GEOPHYSICS*, 1989, 54(6): 766-774.
- [36] Zhao S, Yedlin M J. Some refinements on the finite difference method for 3-D dc resistivity modeling. *GEOPHYSICS*, 1996, 61(5): 1301-1307.
- [37] Ren Z, Qiu L, Tang J, et al. 3-D direct current resistivity anisotropic modelling by goal-oriented adaptive finite element methods. *Geophysical Journal International*, 2018, 212(1): 76-87.
- [38] Ren Z, Tang J. A goal-oriented adaptive finite-element approach for multi-electrode resistivity system. *Geophysical Journal International*, 2014, 199(1): 136-145.
- [39] Wang W, Wu X, Spitzer K. Three-dimensional DC anisotropic resistivity

- modelling using finite elements on unstructured grids. *Geophysical Journal International*, 2013, 193(2): 734-746.
- [40] Lüling M G. The paradox of anisotropy in electric logging: A simple proof and extensions to other physics domains. *GEOPHYSICS*, 2013, 78(1): 1-8.
- [41] 孙仁斌, 楚丽霞, 赵绎钧 等. 时间域激发极化法在内蒙古镶黄旗某锌钨多金属矿的应用. *地质与勘探*, 2017, 53(03): 519-527.
- [42] Wiik T, Nordskog J I, Dischler E, et al. Inversion of inline and broadside marine controlled-source electromagnetic data with constraints derived from seismic data. *Geophysical Prospecting*, 2015, 63(6): 1371-1382.
- [43] Newman G A, Commer M, Carazzone J J. Imaging CSEM data in the presence of electrical anisotropy. *Geophysics*, 2010, 75(2): 51-61.
- [44] 刘云鹤, 殷长春, 蔡晶 等. 电磁勘探中各向异性研究现状和展望. *地球物理学报*, 2018, 61(08): 3468-3487.
- [45] Schmutz M, Albouy Y, Guérin R, et al. Joint Electrical and Time Domain Electromagnetism (TDEM) Data Inversion Applied to the Super Sauze Earthflow (France). *Surveys in Geophysics*, 2000, 21(4): 371-390.
- [46] 杨长福, 林长佑, 孙崇赤 等. 二维对称各向异性介质大地电磁反演. *地震学报*, 2005, (03): 339-345.
- [47] Kenkel J, Hoerdt A, Kemna A. 2D modelling of induced polarization data with anisotropic complex conductivities. *Near Surface Geophysics*, 2012, 10(6): 533-544.
- [48] Liu W, Lin P, Lü Q, et al. Time Domain and Frequency Domain Induced Polarization Modeling for Three-dimensional Anisotropic Medium. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, 2017, 22(4): 435-439.
- [49] Dahlin T, Loke M H. Negative apparent chargeability in time-domain induced polarisation data. *Journal of Applied Geophysics*, 2015, 123: 322-332.
- [50] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 激发极化数据的最小二乘二维反演方法. *地球科学*, 1999, (06): 619-624.

- [51] 李金铭. 激发极化法方法技术指南. 北京: 北京地质出版社, 2004.
- [52] Oldenburg D W, Li Y. Inversion of induced polarization data. *GEOPHYSICS*, 1994, 59(9): 1327-1341.
- [53] 高敬语, 胡祥云, 谭嘉言. 基于 MPI 的时间域激发极化法 2.5 维正则化并行反演. *地球物理学进展*, 2015, 30(06): 2640-2646.
- [54] Zhdanov M. Generalized effective-medium theory of induced polarization. *GEOPHYSICS*, 2008, 73(5): 197-211.
- [55] 张锐锋, 严良俊, 孙社敏 等. 时频电磁法时域激电参数提取与应用. *石油地球物理勘探*, 2016, 51(06): 1227-1232.
- [56] Zhdanov M S, Gribenko A, Burtman V, et al.: Anisotropy of induced polarization in the context of the generalized effective medium theory, SEG Technical Program Expanded Abstracts 2008, 2008: 677-681.
- [57] Kenkel J, Kemna A. Sensitivity of 2-D complex resistivity measurements to subsurface anisotropy. *Geophysical Journal International*, 2017, 208(2): 1043-1057.
- [58] 傅良魁, 姚文斌. 水平地层上的负激发极化效应及其物理解释. *地球物理学报*, 1989, (02): 203-214.
- [59] 孙仁斌, 汪洋, 楚丽霞 等. 关于时间域激发极化法中视极化率负值的判别和应用. *地球物理学进展*, 2017, 32(01): 273-278.
- [60] Sumner J S. Principles of induced polarization for geophysical exploration[M]. 5. Elsevier, 1976.
- [61] Seigel H O. MATHEMATICAL FORMULATION AND TYPE CURVES FOR INDUCED POLARIZATION. *GEOPHYSICS*, 1959, 24(3): 547-565.
- [62] Pek J, Santos F a M. Magnetotelluric impedances and parametric sensitivities for 1-D anisotropic layered media. *Computers & Geosciences*, 2002, 28(8): 939-950.
- [63] 徐世浙. 点源二维各向异性地电断面的直流电场有限元解法. *山东海洋学院学报*, 1988, (01): 81-90.
- [64] Pan K, Tang J. 2.5-D and 3-D DC resistivity modelling using an extrapolation

- cascadic multigrid method. *Geophysical Journal International*, 2014, 197(3): 1459-1470.
- [65] 严波. 2.5 维直流电阻率自适应有限元数值模拟. 中国海洋大学, 2013.
- [66] Geuzaine C, Remacle J-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 79(11): 1309-1331.
- [67] 徐世浙. 点电源二维电场问题中付氏反变换的波数 k 的选择. *物探化探计算技术*, 1988, (03): 235-239.
- [68] 王飞燕. 基于非结构化网格的 2.5-D 直流电阻率法自适应有限元数值模拟. 中南大学, 2009.
- [69] 韩思旭, 欧东新, 李勇. 修正的点源二维直流电测深有限元模拟. *桂林理工大学学报*, 2010, (04): 518-521.
- [70] 宋滔, 王绪本. 点源二维电场正演的一组新的波数. *地球物理学进展*, 2014, (01): 166-171.
- [71] 阮百尧, 熊彬. 大型对称变带宽方程组的 Cholesky 分解法. *物探化探计算技术*, 2000, (04): 361-363.
- [72] 宋滔, 王绪本. 稀疏矩阵快速回代的 Cholesky 分解法. *物探化探计算技术*, 2013, (03): 293-296.
- [73] Li P, Uren N F. Analytical solution for the point source potential in an anisotropic 3-D half-space I: Two-horizontal-layer case. *Mathematical and Computer Modelling*, 1997, 26(5): 9-27.
- [74] 吴小平, 徐果明. 不完全 Cholesky 共轭梯度法及其在地电场计算中的应用. *石油地球物理勘探*, 1998, (01): 89-94.
- [75] 王威. 任意各向异性电阻率三维非结构有限单元数值模拟及其影响研究. 中国科学技术大学, 2013.
- [76] Zhou B, Greenhalgh S A. Finite element three dimensional direct current resistivity modelling: accuracy and efficiency considerations. *Geophysical Journal International*, 2001, 145(3): 679-688.

- [77] Wu X. A 3-D finite-element algorithm for DC resistivity modelling using the shifted incomplete Cholesky conjugate gradient method. *Geophysical Journal International*, 2003, 154(3): 947-956.
- [78] 程志平. 电法勘探教程. 北京: 冶金工业出版社, 2007.
- [79] Wiese, T. DC Anisotropic Resistivity and Inversion. The University of Adelaide School, 2012
- [80] Liu W, Lin P, Lv Q, et al.: FORWARD MODELING OF INDUCED POLARIZATION IN AN ANISOTROPIC CONDUCTIVE SUBSURFACE, Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems 2017, 2017: 303-316.
- [81] Li P, Uren N F. The modelling of direct current electric potential in an arbitrarily anisotropic half-space containing a conductive 3-D body. *Journal of Applied Geophysics*, 1997, 38(1): 57-76.
- [82] Maillet R. The Fundamental Equations of Electrical Prospecting. *Geophysics*, 1947, 12(4): 529-556.

附录 A 点源 2.5 维各向异性介质变分问题

点源电场示意如图 A1 所示：

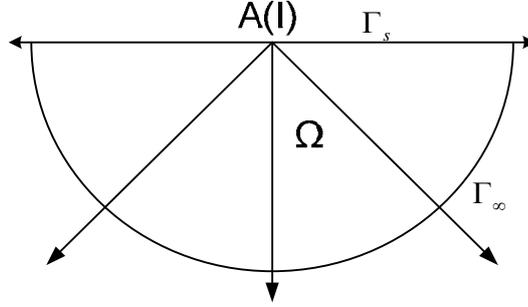


图 A1 二维点源电场示意

图中 Γ_s 为地表边界， Γ_∞ 为无穷远边界， Ω 为整个研究区域，在图中 A 点供入电流 I，对应的边值问题为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) - k^2 \sigma_y U = -I \delta(A) & \in \Omega \quad (a) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \in \Gamma_s \quad (b) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -k \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U & \in \Gamma_\infty \quad (c) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -k \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{\lambda z}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U & \in \Gamma_\infty \quad (d) \end{cases} \quad (A1)$$

用加权余量 δU 乘以式 (A1-a)，并在区域 Ω 中积分，得到：

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) - k^2 \sigma_y U + I \delta(A)] \delta U d\Omega = 0 \quad (A2)$$

即：

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \delta U - k^2 \sigma_y U \delta U + I \delta(A) \delta U] d\Omega = 0 \quad (A3)$$

根据矢量恒等式：

$$\nabla \cdot A\varphi = \nabla \cdot (A\varphi) - A \cdot \nabla \varphi \quad (A4)$$

其中设 $A = \boldsymbol{\tau} \nabla U$ ， $\varphi = \delta U$ ，(A3) 式中第一项积分可以变换为：

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \delta U] d\Omega = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U) - \boldsymbol{\tau} \nabla U \cdot \nabla \delta U] d\Omega \quad (A5)$$

根据高斯定理：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot A d\Omega = \oint_{\Gamma} (\nabla A)_n d\Gamma \quad (\text{A6})$$

将式(A5)中右边第一项面积分化为边界积分：

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U)] d\Omega = \int_{\Gamma_s} [(\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U)]_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} [(\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U)]_n d\Gamma \quad (\text{A7})$$

式(A7)中右侧第一项为对地表积分，根据式(A1-b)推知该项积分为零：

$$\int_{\Gamma_s} [(\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U)]_n d\Gamma = 0 \quad (\text{A8})$$

在远边界上假设各向异性介质的主轴坐标系与观测坐标系重合，所以有：

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \in \Gamma_{\infty} \quad (\text{A9})$$

所以在边界上，式(A7)中右侧第二项积分为：

$$\int_{\Gamma_{\infty}} [(\boldsymbol{\tau} \nabla U)]_n \delta U d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}_n \delta U d\Gamma \quad (\text{A10})$$

将其展开，然后根据(A1-c)和(A1-d)，以及各向异性系数 $\lambda_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_z}$ ，得到：

$$\int_{\Gamma_{\infty}} [(\boldsymbol{\tau} \nabla U)]_n \delta U d\Gamma = - \int_{\Gamma_{\infty}} k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U \delta U d\Gamma \quad (\text{A11})$$

所以式(A7)等于：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U \delta U)] d\Omega &= - \int_{\Gamma_{\infty}} k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U \delta U d\Gamma \\ &= - \frac{1}{2} \delta \int_{\Gamma_{\infty}} k \sigma_y \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k\sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

式(A5)中的第二项积分为：

$$\int_{\Omega} [-\boldsymbol{\tau} \nabla U \cdot \nabla \delta U] d\Omega = - \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} [\nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U)] d\Omega \quad (\text{A13})$$

式(A3)中第二和第三项积分为：

$$\int_{\Omega} -k^2 \sigma_y U \delta U d\Omega = - \delta \int_{\Omega} \frac{k^2 \sigma_y}{2} U^2 d\Omega \quad (\text{A14})$$

$$\int_{\Omega} I \delta(A) \delta U d\Omega = \delta \int_{\Omega} I \delta(A) U d\Omega \quad (\text{A15})$$

将(A12)和(A13)代入(A5) ,得到 $\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) \delta U] d\Omega$ 的积分 ,然后将其与(A14) , (A15)一起代入式(A3)中 ,得到体积分 $F(U)$,所以边值问题(A1)对应的变分问题为 :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(U) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla U \cdot (\boldsymbol{\tau} \nabla U) + \frac{1}{2} k^2 \sigma_x U^2 - I \delta(A) U \right] d\Omega \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\infty}} k \sigma_x \frac{K_1(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})}{K_0(k \sqrt{y^2 + \lambda z^2})} \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{y^2 + \lambda z^2}} U^2 d\Gamma \\ \delta F(U) = 0 \end{array} \right. \quad (A16)$$

附录 B 三维两层模型 Gmsh 代码

```
// two-layerd model
// Mesh sizes
c11 = 200; // outer box
c12 = 5; // electrodes
c13 = 1; // body
dx = 500;
dy = 500;
z1 = 5;
z2 = 500;
// Definition of bounding box
// uper
Point(1) = {-dx, -dy, 0,c11};
Point(2) = {dx, -dy, 0,c11};
Point(3) = {dx, dy, 0,c11};
Point(4) = {-dx, dy, 0,c11};
Line(1) = {1,2};
Line(2) = {2,3};
Line(3) = {3,4};
Line(4) = {4,1};
Line Loop(1) = {1,2,3,4};
Plane Surface(1) = {1};
dis[] =
{0.0,1.000000000000000056e-01,1.178768634793587178e-01,
1.389495494373137463e-01,1.637893706954064166e-01,
1.930697728883249975e-01,2.275845926074788195e-01,
```

```
2.682695795279725903e-01,3.162277660168379412e-01,  
3.727593720314940073e-01,4.393970560760790400e-01,  
5.179474679231209633e-01,6.105402296585328292e-01,  
7.196856730011519376e-01,8.483428982440719412e-01,  
1.000000000000000000e+00,1.178768634793587289e+00,  
1.389495494373137463e+00,1.637893706954063777e+00,  
1.930697728883249642e+00,2.275845926074787418e+00,  
2.682695795279724571e+00,3.162277660168379523e+00,  
3.727593720314939851e+00,4.393970560760790178e+00,  
5.179474679231209855e+00,6.105402296585326738e+00,  
7.196856730011517378e+00,8.483428982440717192e+00,  
1.000000000000000000e+01,1.178768634793586578e+01,  
1.389495494373137419e+01,1.637893706954062978e+01,  
1.930697728883249553e+01,2.275845926074788750e+01,  
2.682695795279724749e+01,3.162277660168379256e+01,  
3.727593720314938253e+01,4.393970560760790534e+01,  
5.179474679231207546e+01,6.105402296585326383e+01,  
7.196856730011514003e+01,8.483428982440716482e+01,  
1.000000000000000000e+02,1.178768634793586614e+02,  
1.389495494373137490e+02,1.637893706954062907e+02,  
1.930697728883249624e+02,2.275845926074786405e+02,  
2.682695795279724393e+02,3.162277660168379612e+02  
};  
For i In {0:50}  
x1~{i} = newp; Point(x1~{i}) = {0,dis[i],0,cl2}; // y=0  
Point{x1~{i}} In Surface{1};  
EndFor  
p=newreg;
```

```
Physical Point(p) = {x1~{0}:x1~{50}};  
out[] = Extrude {0,0,-z1} {Surface{1}};;  
num = out[0];  
out1[] = Extrude {0,0,-z2} {Surface{num}};;  
Field[1] = Attractor;  
Field[1].NodesList = {x1~{0}:x1~{50}};  
Field[2] = Threshold;  
Field[2].IField = 1;  
Field[2].LcMin = c12;  
Field[2].LcMax = c11/2;  
Field[2].DistMin = 10;  
Field[2].DistMax = 400;  
Field[3] = Min;  
Field[3].FieldsList = {2};  
Background Field = 3;  
Physical Surface("layer1",1) = {out[2],out[3],out[4],out[5]};  
Physical Volume("volum1",101) = {out[1]};  
Physical Surface("layer2",2) = {out1[0],out1[2],out1[3],out1[4],out1[5]};  
Physical Volume("volum2",102) = {out1[1]};
```

致 谢

首先要感谢我的合作导师也是我的博士导师王赟研究员,非常幸运能成为您的学生,感谢王老师给我提供的良好的科研环境,感谢王老师对我生活和科研上的关心,感谢王老师在我的每一篇论文上做出的修改和批注,谢谢您!

感谢我的硕士导师王绪本教授,感谢您将我领进了地球物理的大门,感谢您在我博后的科研工作期间给我的建议和帮助。

感谢课题组的刘云副研究员,感谢刘老师一直以来对我在科研和生活上的关系和照顾。感谢课题组的汪超副研究员、成联正同学、张川工程师、肖调杰师弟、陆顺富师弟、蔡义宇师弟、邱新明师弟、李远方师妹、杜威同学、许小凯同学及课题组潘锌铈的帮助与陪伴,感谢大家让我的科研生活变得充实有趣。

感谢吉林大学的殷长春老师,有幸在北京的一次会议上见到您,感谢您的热情,也感谢您对我科研道路上的建议。感谢吉林大学的冯暄老师,在甘肃出野外的几天,让我感受到了您对科研的执著,感谢您对我的指导。

感谢中国科学技术大学的尤淼师兄,中国自然资源航空物探遥感中心的杨淼鑫师姐,谢谢你们对我的帮助。感谢四川省地震局的罗勇同学、王宇航同学以及中国电建集团贵阳院的江晓涛同学,感谢你们在我最困惑的时候给我的建议和帮助。还要感谢在成都理工大学的夏时斌同学、姜磊同学、罗威同学、岳云宝同学、周洪生同学以及王堃鹏同学。

感谢参加博士后出站答辩的各位评委,谢谢你们提出的宝贵建议!感谢胡晓燕老师在博后管理方面给予的帮助和指导!感谢中国科学院地球化学研究所为我提供良好的生活、学习环境!

感谢我的父母和哥哥,是你们对我的关心,以及对我学业的支持,才使我能够全身心的投入科研,希望你们身体健康!特别感谢我的妻子李金芮以及我的岳父岳母,感谢你们对我科研的支持和理解。

感谢一路走来关心支持我的师长,亲人和朋友们!

2019年8月

作者简介及发表论文情况

作者简介：

1988年1月出生于四川省什邡市。

2006年9月——2010年6月,在成都理工大学信息工程学院获得学士学位。

2010年9月——2013年6月,在成都理工大学地球物理学院获得硕士学位。

2013年9月——2017年6月,在中国科学院地球化学研究所攻读博士学位。

2017年7月——2019年8月,在中国科学院地球化学研究所从事博士后研究工作。

博士生期间发表的学术论文：

Song Tao, Liu Yun, Wang Yun. Finite Element Method for Modeling 3D Resistivity Sounding on Anisotropic Geoelectric Media[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017, 2017(5):1-12.

Tao Song, Yun Liu, Yun Wang. Finite Element Method for Modeling 3-D Resistivity Sounding on Anisotropic Geoelectrical Media With Singularity removal. GEM2015. (会议论文)

宋滔, 刘云, 王赞, 马驹. 音频大地电磁法正演模拟在安徽某矿区的应用[J]. 矿物学报, 2015, (S1):241. (会议论文)

刘云, **宋滔**, 王赞. 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率法有限元数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2014, (03): 1194-1200.

刘云, **宋滔**, 王赞. 大定源回线瞬变电磁场数值滤波算法[J]. 物探化探计算技术, 2016, (04):437-442.

博士后期间发表的学术论文：

Tao Song, Yun Liu, Yun Wang. Paradox of Anisotropy in Resistivity and TDIP[J]. Applied Geophysics. (Accepted)

Tao Song, Yun Liu, Yun Wang. DC modeling in 2.5-D anisotropic media with singularity removal[J]. Exploration Geophysics, 2019, 50(3), 221-232.

蔡义宇,肖调杰,宋滔,王赞.二维大地电磁各向异性参数对视电阻率的影响研究[J].地球物理学进展.(已录用)

柯颂颂,宋滔,刘云.2.5 维各向异性介质直流电法异常场的正演模拟[J].物探化探计算技术.(已录用)

博后期间参与的科研项目：

国家重点研发计划——深部矿产资源地球物理综合探测与信息提取(编号：2016YFC0600505)