



刘云, 宋滔, 王赞. 2014. 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率法有限元数值模拟. 地球物理学进展, 29(3): 1194-1200, doi: 10.6038/pg20140326.

LIU Yun, SONG Tao, WANG Yun. 2014. 2.5-D numerical modeling on DC resistivity by FEM with continuous variation of conductivity. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 29(3): 1194-1200, doi: 10.6038/pg20140326.

## 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率法有限元数值模拟 2.5-D numerical modeling on DC resistivity by FEM with continuous variation of conductivity

刘云, 宋滔\*, 王赞

LIU Yun, SONG Tao\*, WANG Yun

中国科学院地球化学研究所矿床地球化学国家重点实验室, 贵阳 550002

State Key Laboratory of Ore Deposit Geochemistry, Institute of Geochemistry Chinese Academy of Sciences, Guiyang 550002, China

**摘要** 在阮百尧、徐世浙(1998, 2001)工作基础上, 给出四边形内三角网格单元分割, 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率数值模拟方法. 在二维起伏地形情况下, 有限元设计为四边形内分割四个三角网格单元, 单元内的电位值和电导率设计为线性变化, 将研究区域远边界的第三类边界条件简化为第二类齐次边界条件, 重新给出一组适用性较好的 Fourier 反变换系数, 并采用分离式 Cholesky 分解法快速求解线性方程组. 通过对 3 个地电模型的计算与对比分析, 其结果与解析法的均方根误差小于 0.2%, 计算速度比较常规方法提高了 5 倍. 能有效模拟起伏地形和复杂形态的地电体模型.

**关键词** 电导率连续变化; 2.5 维; 直流电阻率法; 有限元; 数值模拟

中图分类号 P631

文献标识码 A

doi: 10.6038/pg20140326

**Abstract** Based on the study of Ruan and Xu(1998, 2001), the triangle division method in the quadrangle and the thinking of continuous variation of conductivity within each element are presented for numerical modeling on 2.5 dimensional(2.5-D) direct-current(DC) resistivity. Under the condition of two-dimensional topography, the finite element is designed to the method of four triangles division in a quadrangle, then potential and conductivity are also designed to bilinear variation within each triangle element. In the paper, the third class boundary condition is simplified for the second class of homogeneous boundary condition at far boundaries of the study area, a set of suitability better inverse Fourier transform coefficients is given, and the separate Cholesky decomposition method is used for quickly solving linear equations. By calculating and comparative analysis on three geoelectric models lastly, the result of our method show a high accuracy (the mean square error is less than 0.2%), the calculation speed of the numerical method can be increased at least 5 times than general methods, and the method can model arbitrarily complicated terrain and geoelectric bodies preferably.

**Keywords** continuous variation of conductivity; 2.5-D; DC resistivity; FEM, numerical modeling

### 0 引言

在野外实际地质情况中, 由于岩、矿石的组成、温度、湿度的变化, 地球介质的电导率分布往往是连续变化的(徐世浙等, 1995; 李予国等, 1996). 阮百尧、徐世浙(1998)给出了矩形网格单元、电导率连续变化 2.5 维直流电阻率数值模拟方法, 从而有效克服了 Coggon(1971)、Dey 和 Morrison(1979)电导率分布均匀的缺陷. 为了易于模拟起伏地形和地下复杂地电体的分布, 阮百尧(2001)给出了三角网格单元、电导率连续变化 2.5 维直流电阻率数值模拟方法. 本文在此

基础上, 导出了四边形内三角网格单元分割, 电导率连续变化 2.5 维直流电阻率数值模拟方法, 并对远边界条件做了进一步的简化处理, 重新给出了一组 Fourier 反变换系数, 采用分离式 Cholesky 分解法快速求解线性方程组. 通过对一维连续介质解析法理论模型、土槽实验模型、倾斜界面异常体模型的计算与对比分析, 本文方法有较高的模拟精度和计算速度, 能够有效模拟起伏地形和复杂形态的地电体模型.

### 1 波数域点源二维直流电场的变分问题

如图 1 所示, 假设三维地球介质模型的电导率沿  $y$  方向

收稿日期 2013-09-09; 修回日期 2013-11-28. 投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

基金项目 国家科技 973 项目“华南大面积低温成矿作用”中“大型-超大型低温矿床成矿规律与找矿预测”课题(2014CB440905)和矿床地球化学国家重点实验室“十二五”项目群(SKLOGD-ZY125-01)联合资助.

作者简介 刘云, 男, 博士, 助理研究员, 主要从事地电场数值模拟及反演成像技术研究. (E-mail: liu\_yun@mail.gyig.ac.cn)

\* 通讯作者 宋滔, 男, 博士研究生, 主要从事地电场数值模拟及反演成像技术研究. (E-mail: shaman\_king7@163.com)

(构造方向)上无变化, 三维点源直流电场总电位  $U$  沿  $y$  方向做 Fourier 变换至波数域, 这时可将三维点源直流电场的边值问题转化为 2.5 维直流电场的边值问题来进行处理. 此时, 波数域点源二维直流电位  $u$  所对应的变分问题(徐世浙, 1994)为

$$\begin{cases} F(u) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 + \frac{1}{2} \sigma k^2 u^2 - I \delta(x_A) \delta(z_A) u \right] d\Omega \\ \quad + \int_{\Gamma_{\infty}} \frac{1}{2} \frac{k \sigma K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} u^2 d\Gamma \\ \delta F(u) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

在式(1)中,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  为二维 Hamilton 算子,  $\Omega$  为二维研究区域,  $\Gamma_{\infty} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  为研究区域  $\Omega$  的远边界,  $\sigma$  为介质电导率,  $k$  为 Fourier 变换波数,  $n$  是  $\Gamma_{\infty}$  的外法向,  $r_A$  是点电源  $A(x_A, z_A)$  到  $\Gamma_{\infty}$  积分点的距离,  $I$  为点电源的电流强度,  $K_0, K_1$  为零阶、一阶第二类修正 Bessel 函数.

## 2 有限单元法

采用有限单元法求解泛函式(1)的变分问题, 具体步骤如下内容.

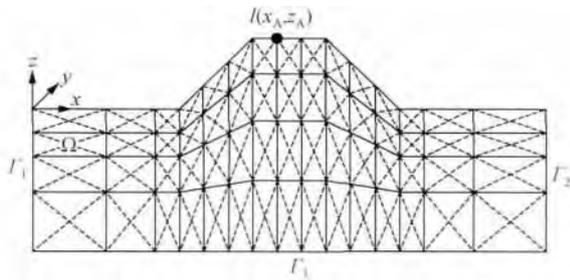


图 1 研究区域  $\Omega$  有限元网格剖分

Fig. 1 Division of the study region  $\Omega$  with FEM grids

### 2.1 网格剖分

如图 1 所示, 考虑到复杂地球介质体形状的任意性, 将研究区域  $\Omega$  用三角单元网格进行剖分. 首先对研究区域进行水平地形情况下的四边形网格剖分(熊彬和阮百尧, 2002; 潘克家等, 2012), 然后在每一个四边形网格内剖分为 4 个三角单元网格(徐世浙, 1994; 刘云和王绪本, 2012). 当模拟起伏地形时, 地面网格沿实际地形线进行网格剖分, 地下网格采用逐渐放平进行处理, 这样得到的起伏网格更加符合复杂地形情况下直流电场的分布规律(吕玉增和阮百尧, 2006; 吕玉增, 2008). 纵向起伏网格的坐标按照如下方式进行计算得到:  $z_{i,j} = Z_{i,j} + \frac{D - Z_{i,j}}{D} E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ ). 其中,  $E_i$  是地面上第  $i$  个测点的地形高程值,  $D$  为水平地形情况下纵向网格( $z$  方向)的最大深度值,  $Z_{i,j}$  是水平地形情况下第  $i$  个测点、第  $j$  个纵向网格节点的  $z$  坐标,  $z_{i,j}$  是起伏地形情况下第  $i$  个测点、第  $j$  个纵向网格节点的  $z$  坐标,  $n$  为测点个数,  $m$  为纵向网格节点个数. 采用这样的网格剖分方法, 一方面避免了三角单元网格可能出现过于尖锐情况, 另一方面则可以利用三角形的斜边去模拟起伏地形线和复杂介质的倾斜界面(陈小斌, 1999; 刘云, 2012).

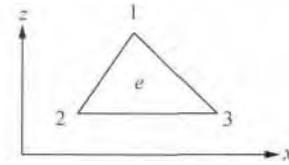


图 2 三角单元  $e$

Fig. 2 Triangle element  $e$

### 2.2 线性插值

如图 2 所示, 在三角单元  $e$  内, 电位  $u$  和电导率  $\sigma$  设计为线性变化, 则在每一个三角单元内有

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_i.$$

当三角单元  $e$  的斜边  $\overline{12}$  位于  $\Gamma_1$  边界上时, 有  $\sigma = \sum_{i=1}^2 N_i \sigma_i$ . 这里,  $u_i$  为三角单元节点处的电位,  $\sigma_i$  为三角单元节点处的电导率, 下标 ( $i = 1, 2, 3$ ) 为三角单元的设定节点号.  $N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i x + b_i z + c_i)$  是关于  $x$  和  $z$  的线性插值形函数 ( $i = 1, 2, 3$ ). 其中,  $\Delta = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$  是三角单元的面积.

$$\begin{aligned} a_1 &= z_2 - z_3, a_2 = z_3 - z_1, a_3 = z_1 - z_2, b_1 = x_3 - x_2, \\ b_2 &= x_1 - x_3, b_3 = x_2 - x_1, c_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2, \\ c_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3, c_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1, \end{aligned}$$

$(x_1, z_1), (x_2, z_2)$  和  $(x_3, z_3)$  是三角单元的 3 个节点坐标.

### 2.3 单元分析

将泛函式(1)在整个研究区域  $\Omega$  中离散化, 积分区域可以表示为所有三角单元  $e$  的线性组合, 即

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 u^2 d\Omega - \\ &\quad \sum_{\Omega} \int_e I \delta(x_A) \delta(z_A) u d\Omega + \\ &\quad \sum_{\Gamma_{\infty}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{2} \frac{k \sigma K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} u^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

单元分析 1  $u$  对  $x$  求偏导数, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 N_i u_i \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^T \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)^T = \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\Delta} (a_1 \quad a_2 \quad a_3),$$

$$\mathbf{u}_e^T = (u_1 \quad u_2 \quad u_3).$$

$$\text{显然, } \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \mathbf{u}_e^T \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \mathbf{u}_e. \text{ 同理可得, } \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 =$$

$$\mathbf{u}_e^T \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)^T \mathbf{u}_e.$$

因此, 对于式(2)中第一个积分项(徐世浙, 1994; 阮百尧, 2001; 刘云, 2012), 有

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 d\Omega &= \frac{1}{2} \int_e \sigma \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \left[ \int_e \sum_{i=1}^3 (N_i \sigma_i) \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)^T + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^T \int dx dz \left\{ u_e = \frac{1}{2} u_e^T k_{1e} u_e, \right. \quad (3)$$

在式(3)中,  $k_{1e} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{12\Delta} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ .

单元分析 2 对于式(2)中第二个积分项(徐世浙, 1994; 阮百尧, 2001; 刘云, 2012), 有

$$\int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 u^2 d\Omega = \frac{1}{2} u_e^T \left[ k^2 \int_e \sum_{i=1}^3 (N_i \sigma_i) (NN^T) dx dz \right] u_e = \frac{1}{2} u_e^T k_{2e} u_e, \quad (4)$$

在式(4)中,  $N^T = (N_1 \quad N_2 \quad N_3)$ ,

$$k_{2e} = \frac{k^2 \Delta}{60} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

其中,  $c_{11} = (6 \ 2 \ 2) \sigma$ ,  $c_{12} = (2 \ 2 \ 1) \sigma$ ,  $c_{13} = (2 \ 1 \ 2) \sigma$ ,  $c_{21} = (2 \ 2 \ 1) \sigma$ ,  $c_{22} = (2 \ 6 \ 2) \sigma$ ,  $c_{23} = (1 \ 2 \ 2) \sigma$ ,  $c_{31} = (2 \ 1 \ 2) \sigma$ ,  $c_{32} = (1 \ 2 \ 2) \sigma$ ,  $c_{33} = (2 \ 2 \ 6) \sigma$ ,  $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$ .

单元分析 3 对于式(2)中的第三个积分式(徐世浙, 1994; 阮百尧, 2001), 根据  $\delta$  函数的性质可知, 只有点电源  $A(x_A, z_A)$  对该积分式才有贡献. 因此有

$$\int_e I \delta(x_A) \delta(z_A) u d\Omega = \frac{1}{2} I u_A = P_e u_e = u_e^T P_e. \quad (5)$$

单元分析 4 对于式(2)中的第四个积分项只对远边界  $\Gamma_\infty$  进行线积分(阮百尧, 2001; 徐世浙, 1994). 假设, 当三角单元的  $\overline{12}$  边落在  $\Gamma_1$  边界上时, 在波数域  $k$  中,  $\frac{kK_1(kr_A)\cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)}$  为一个常数值  $C$ , 可提至积分式之外. 因此, 线积分

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{2} \frac{k\sigma K_1(kr_A)\cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} u^2 d\Gamma &= C \int_{\overline{12}} \frac{1}{2} \sigma u^2 dz \\ &= \frac{1}{2} u_e^T \left[ C \int_{\overline{12}} \sum_{i=1}^2 (N_i \sigma_i) (NN^T) dz \right] u_e \\ &= \frac{1}{2} u_e^T k_{4e} u_e, \end{aligned} \quad (6)$$

在式(6)中,  $k_{4e} = \frac{Cl}{12} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $l$  为  $\overline{12}$  边的长度,

其中,  $d_{11} = (3 \ 1) \sigma$ ,  $d_{12} = (1 \ 1) \sigma$ ,  $d_{21} = d_{12}$ ,  $d_{22} = (1 \ 3) \sigma$ ,  $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2)^T$ .

2.4 系数矩阵总体合成及求变分

对每个单元系数矩阵  $k_e$  按照总体节点号进行扩展, 得到  $\overline{k_e}$ , 并相加得到总体系数矩阵  $K$ , 即

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2} u^T \left( \sum_{\Omega} \overline{k_{1e}} + \sum_{\Omega} \overline{k_{2e}} + \sum_{\Gamma_\infty} \overline{k_{4e}} \right) u - u^T P \\ &= \frac{1}{2} u^T K u - u^T P. \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $P = (0 \ \dots \ \frac{1}{2} I \ \dots \ 0)^T$  是与点电源有关的

列向量. 系数矩阵  $K$  的数学表现形式为  $K = \sum_{e=1}^{NE} (\overline{k_{i,j}})_e (i, j$

$= 1, \dots, ND)$ ,  $NE$  为总体单元数,  $ND$  为总体节点号,  $e$  为单元号,  $i, j$  为总体节点号变量. 显然,  $K$  是一个对称、正定的大型稀疏矩阵, 可按照变带宽方式进行存储(刘德贵等, 1980; 阮百尧和熊彬, 2000). 令式(7)的泛函  $F(u)$  的变分为零(徐世浙, 1994; 刘云, 2012), 便可得到线性方程组

$$Ku = P, \quad (8)$$

解此线性方程组, 便可得各节点电位值  $u$ .

2.5 计算加速的处理技术

由于远边界  $\Gamma_\infty$  离点电源较远, 即  $r_A \rightarrow \infty$ . 此时有,  $\frac{K_1(kr_A)}{K_0(kr_A)} \rightarrow 1, u \rightarrow 0$ . 因此, 波数域点源二维直流电位  $u$  所满足的远边界条件(黄俊革, 2003; 黄俊革等, 2003; 强健科, 2006)为  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{kK_1(kr_A)\cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} u \rightarrow 0$ . 这时, 可将远边界条件从第三类边界条件简化成为第二类齐次边界条件  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , 简化后的第二类齐次边界条件属于有限单元法的自然边界条件, 在变分方程的推导过程中可以自动满足(徐世浙, 1994). 对照式(7)中  $K$  系数矩阵, 这时可以简化为  $K = \sum_{\Omega} \overline{k_{1e}} + \sum_{\Omega} \overline{k_{2e}}$ . 此时, 得到的  $K$  矩阵中的元素值只与地电模型参数和波数有关系, 而与点电源没有关系. 参考附录程序所示, 若在求解方程式(8)的过程中, 可以先使用 Cholesky 分解法将  $K$  系数矩阵进行分解, 并保留分解结果. 随着供电电极的每一次移动, 右侧列向量  $P$  中点电源的存储位置也相应发生变化, 这时只需要将每一次的不同列向量  $P$  通过顺代和回代就可以实现快速求解(阮百尧, 2001; 宋滔, 2013).

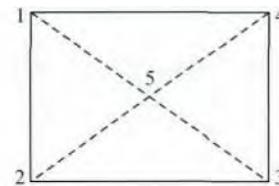


图 3 四边形内三角网格剖分方式

Fig. 3 The triangle division method in the quadrangle

如图 3 所示, 本文所采用的四边形内三角网格剖分方式, 比较单一的四边形网格剖分来说, 其中增加了一个中间节点 5. 但是不难发现, 节点 5 只与周围的四个网格节点有关系, 而与其它网格节点没有任何直接联系. 可以在单元分析中, 运用消元法将这个节点消去(徐世浙, 1994). 因此, 节点 5 是一个虚节点, 并不包含在总体节点数中参与计算. 等到解方程结束后, 也可以根据周围四个角点的已知电位值和网格单元系数之间的关系, 将节点 5 的电位值直接计算出来. 这样, 一方面既不增加节点的总数, 节省了计算量, 另一方面在每个三角单元内仍具有各自的不同物性. 具体做法如下(徐世浙, 1994; 刘云, 2012):

节点 5 的消除, 将  $k_{i,j} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$  替换为  $k'_{i,j}$ , 则有

$$k'_{i,j} = k_{i,j} - \frac{k_{i,5} k_{5,j}}{k_{5,5}} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

节点 5 的恢复, 则有

$$u_5 = -\frac{1}{k_{5,5}} \sum_{j=1}^4 k_{5,j} u_j,$$

$$U = \sum_{i=1}^n g_i u(k_i), \quad (9)$$

### 3 Fourier反变换及视电阻率的计算

#### 3.1 Fourier反变换

在以上内容中,可以求出若干波数域  $k_i$  中点源二维直流电场的电位  $u(k_i)$  值,然后采用 Fourier 反变换,就可以求解出三维点源空间的总电位  $U$ . 其中, Fourier 反变换的计算公式为

其中,  $k_i$  是波数,  $g_i$  是加权系数,  $n$  是波数的个数. 本文是以 1~150 的研究区域, 共计 20 个网格点, 按照优化选取的办法(徐世浙, 1994; 徐世浙, 1988), 确定出的一组  $k$  和  $g$ , 均方相对误差小于 0.01%, 共有 5 个系数值, 如表 1 所示. 根据物理模拟的等比例缩放原则可知, 这一组 Fourier 反变换系数可以满足的数值模拟网格区域在 (1~150)C 的范围内, 其中 C 为缩放比例系数.

表 1 Fourier 反变换的  $k_i$  和  $g_i$

Table 1  $k_i$  and  $g_i$  parameters of Fourier inverse transform

	1	2	3	4	5
$k_i$	3.9928588E-03	3.6820836E-02	0.1434751	0.4675921	1.554464
$g_i$	8.4590055E-03	3.6928654E-02	0.1119829	0.3464288	1.275571

#### 3.2 视电阻率的计算

二极测量装置的视电阻率表示为(阮百尧, 2001)  $\rho_a(A, M) = K(A, M) \frac{U(A, M)}{I}$ , 三极测量装置的视电阻率表示为  $\rho_a(A, M, N) = K(A, M, N) \frac{U(A, M) - U(A, N)}{I}$ , 四极测量装置的视电阻率表示  $\rho_a(A, B, M, N) = K(A, B, M, N) \frac{U(A, M) - U(A, N) - U(B, M) + U(B, N)}{I}$ . 其中,  $K$  为装置系数(程志平, 2007),  $A, B$  为供电电极,  $M, N$  为测量电极. 供电电流强度  $I$  为常数值, 一般可设为 1A.

### 4 模型计算

为验证本文的数值模拟方法, 首先与一维连续介质模型的解析法, 以及与土槽实验地形模型做计算与对比分析, 之后用该算法对复杂界面异常体模型做计算分析.

在对以下所有模型的数值模拟中, 研究区域的网格剖分方法具体如下: 在横向网格剖分中, 目标研究区域采用等间隔网格, 网格系数为 1. 左、右两边扩展的稀疏网格数各为 15 个, 网格系数依次分别为 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 16, 32, 64. 横向网格的实际大小等于点距乘以网格系数. 在纵向网格剖分中, 网格系数为 20 个, 依次分别为 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 16, 32, 64. 纵向网格的实际大小等于点距乘以网格系数. 值得注意的是, 在 4.1 节中的 Fourier 反变换系数的选择, 就是按照这一组纵向网格系数进行的优化选取得到的. 当模拟起伏地形时, 起伏地形网格则按照第 3.1 节方法进行剖分.

#### 4.1 一维连续介质模型

如图 4 所示, 为一维连续介质地电模型, Mallick 和 Jain (1979) 曾用解析法计算过这个模型. 顶层电阻率  $\rho_1$  为 50  $\Omega\text{m}$ , 层厚度  $H_1$  为 2 m. 底层电阻率  $\rho_3$  为 1000  $\Omega\text{m}$ , 中间层为连续介质层, 层厚度  $H_2$  为 10 m, 中间层连续介质电阻率  $\rho_2$  按线性变化规律从  $\rho_1$  变化到  $\rho_3$ . 测量装置为对称四极装置.

有限元数值模拟中, 电极数为 200 个, 最大移动间隔为 99, 取测线中心处第 100 号点测点为研究对象. 则解析法与

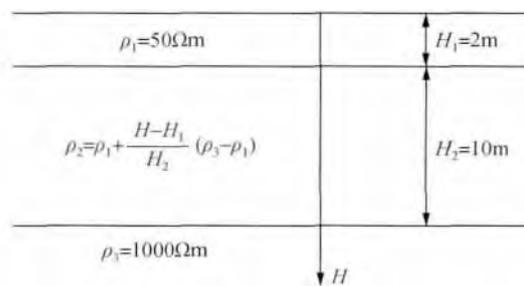


图 4 一维连续介质地电模型

Fig. 4 The 1-D geoelectric model of continuous medium

数值模拟的结果对比如图 5 所示. 横坐标为极距 ( $AB/2$ , 单位为 m), 纵坐标为视电阻率 ( $\rho_a$ , 单位为  $\Omega\text{m}$ ). 其中黑色虚线曲线 (Analytical) 为解析法的计算结果 (Mallick and Jain, 1979), 蓝色叉点曲线 (Numerical 1) 为常规方法的带第三类边界条件数值模拟结果, 红色圈点曲线 (Numerical 2) 为简化后的带第二类齐次边界条件数值模拟结果.

由图可见, 曲线首支除有 2 个测点由于受电源点场源影响, 有较大的相对误差 (最大相对误差为 7.1%), 其余各测点拟合都很好, 两条数值模拟曲线和解析法曲线的均方根误差小于 0.2%. 曲线 Numerical 1 计算耗时为 12.7 s, 曲线 Numerical 2 计算耗时为 2.5 s. 计算结果表明: 一方面, 本文方法能够有效地模拟连续介质模型. 另一方面, 在有较高模拟精度的前提下, 采用了远边界条件的简化处理技术和消去网格虚节点的处理技术后, 大大提高了计算速度.

#### 4.2 地形模型

如图 6 下部所示为二维山脊地形模型, 周熙震和钟本善 (1986) 对这个模型做过土槽物理模拟实验. 山坡的倾角为 45°, 电阻率为 1  $\Omega\text{m}$  的均匀介质, 山顶高 0.3 m, 剖面长 2 m, 测量装置为二极测深装置, 点距为 0.1 m, 极距 (AO) 为 0.1 m, 电极总数为 20 个.

土槽物理模拟实验和本文数值模拟结果如图 6 上部曲

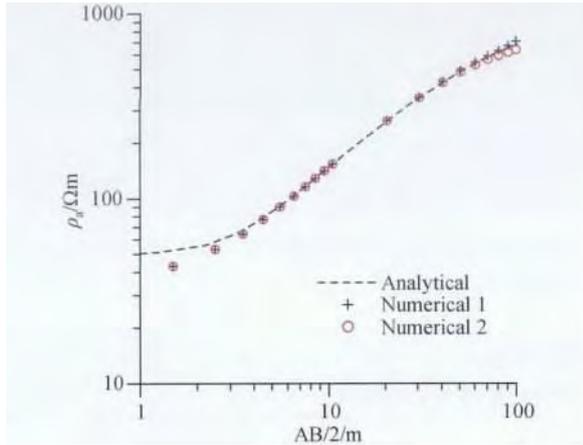


图 5 有限元数值模拟与解析法结果比较  
Fig. 5 Comparison between analytical and numerical solutions by FEM

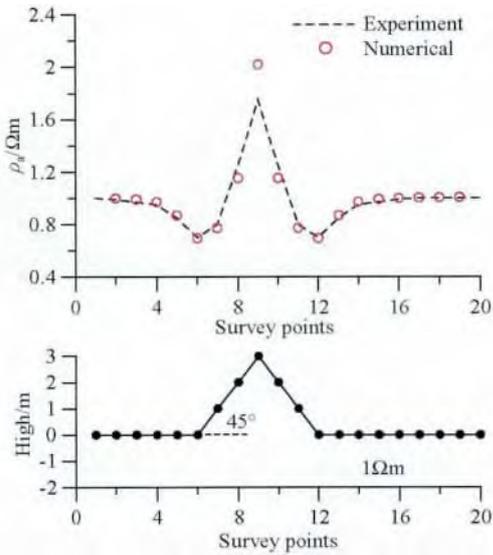


图 6 二维山脊地形模型与数值模拟结果  
Fig. 6 The 2-D chine terrain model and result of the numerical modeling

线图所示. 其中, 横坐标为测点号, 纵坐标为视电阻率( $\rho_a$ , 单位为  $\Omega m$ ), 黑色虚线曲线(Experiment)为土槽物理模拟实验结果(周熙襄和钟本善, 1986), 红色圈点曲线(Numerical)为本文数值模拟结果. 由于受到二维物理模型几何尺寸的局限

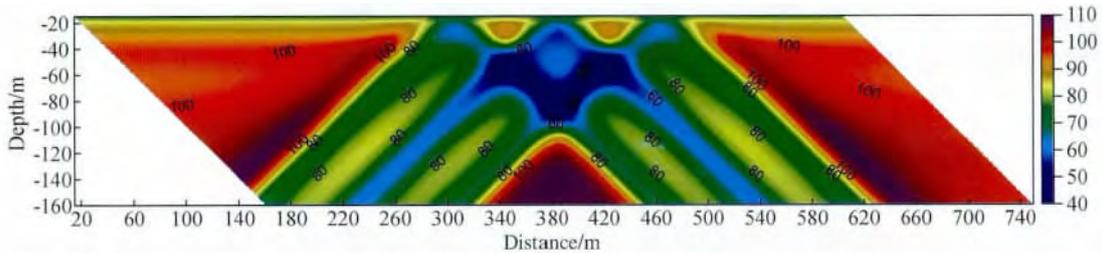


图 8 偶极—偶极测量装置视电阻率拟断面图  
Fig. 8 Pseudo section of apparent resistivity on dipole-dipole survey array

性, 山峰顶点处测点的相对误差较大, 为 14.2%, 其余各测点拟合都很好, 数值模拟曲线和土槽物理模拟曲线的均方根误差为 1.5%. 计算结果表明, 本文采用的三角网格模拟起伏地形、电导率连续变化的数值模拟技术更加符合野外实际地质情况.

4.3 复杂界面异常体模型

如图 7 所示, 模型设计为均匀介质半空间中放置一“W”字形低阻异常体模型. 背景电阻率为  $100 \Omega m$ , 异常体电阻率为  $20 \Omega m$ . 异常体上顶面距地面  $20 m$ , 下底面距地面  $60 m$ . 异常体上顶面外宽  $180 m$ , 下底面外宽  $90 m$ . 直流电阻率法的测量装置为偶极—偶极测深装置, 相邻电极间隔为  $10 m$ , 发射偶极大小为  $1$ , 接收偶极大小为  $1$ , 初始隔离系数为  $1$ , 测道数为  $30$ , 排列数为  $60$ .

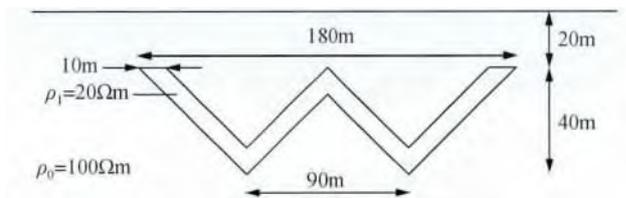


图 7 复杂界面异常体模型  
Fig. 7 The complex interface anomaly body model

通过计算, 测线上电极总数为  $92$  个, 则有限元数值模拟网格剖分为: 网格数为  $121 \times 20$  (横向网格数为  $121$ , 左、右稀疏网格数各为  $15$ ; 纵向网格数为  $20$ ). 大型稀疏矩阵的压缩存储方式按带宽方式进行存储(刘德贵等, 1980; 阮百尧和熊彬, 2000). 参考附录程序所示, 采用分离式 Cholesky 分解法求解线性方程组(阮百尧和熊彬, 2000; 宋滔, 2013).

如图 8 所示, 为本文数值模拟方法得到的偶极—偶极测量装置视电阻率拟断面图, 横坐标为测点位置 (Distance, 单位为  $m$ ), 纵坐标为视深度 (Depth, 单位为  $m$ ). 计算耗时为  $0.5 s$ . 从图可见, “W”字形异常体的 3 个上顶面处所对应的 3 个“八”字低阻异常形态清晰可见, 表明本文采用三角网格模拟复杂异常体的方法是有效的.

5 结论

本文给出四边形内三角单元网格剖分、电导率连续变化 2.5 维直流电阻率有限元数值模拟方法, 比较常规的四边形或三角单元剖分、电导率分布均匀的模拟方法来说: (1) 对起伏网格采用了逐渐放平的处理, 三角单元内电位值、电导率连续变化的数值模拟技术, 一方面更加符合复杂地形情况下

直流电场的分布规律,另一方面又能很好模拟野外实际地形和复杂地体模型,提高了模拟精度。(2)对远边界条件采用第二类齐次边界条件,以及采用分离式 Cholesky 分解法快速求解线性方程组,使计算速度提高了 5 倍。通过对一维连续介质模型的模拟计算,以及对土槽地形模型的模拟计算,验证了数值模拟算法的可靠性。对复杂异常体模型进行模拟,结果表明本方法是有效的。本文方法考虑的是 2.5 维模型情况,三维电导率连续变化的数值模拟方法以及快速计算问题将是本文的后续研究工作。

致谢 谨以此文怀念我的硕士导师——阮百尧教授,本文得益于他曾经多年来对我学业上的指导和帮助。

## 附录 分离式 Cholesky 分解法求解线性方程组 Fortran 语言程序

1. 子程序 SUBROUTINE CHOLESKY\_DEC(N, NP, ID, A)

(1)哑元说明

N 整变量,输入参数,方程组的阶数或解向量个数。

NP 整变量,输入参数,为下三角矩阵变带宽内的元素个数。

A 输入、输出参数, NP 个元素的一维实数组。输入时存放下三角矩阵变带宽内的各个元素,输出时存放 Cholesky 分解后的各个元素。

ID 输入参数, N 个元素的一维整数组。存放下三角矩阵中的对角线元素在 A 中的位置。

(2)程序

SUBROUTINE CHOLESKY\_DEC(N, NP, ID, A)

INTEGER N, NP

INTEGER ID(N)

REAL A(NP)

I0=1

DO 1 I=1, N

IM=ID(I)

IF(I==1) GOTO 4

JM=I-IM+I0-1

IF(JM .LT. 1) THEN

J0=1

ELSE

J0=ID(JM)+1

END IF

DO 2 JT=I0, IM-1

J=I-IM+JT

JM=ID(J)

DO 3 KT=I0, JT-1

K=I-IM+KT

JK=JM-(J-K)

IF(JK .LT. J0) GOTO 3

A(JT)=A(JT)-A(KT)\*A(JK)

3 CONTINUE

J0=JM+1

A(JT)=A(JT)/A(JM)

2 CONTINUE

DO 5 K=I0, IM-1

A(IM)=A(IM)-A(K)\*A(K)

5 CONTINUE

4 A(IM)=SQRT(A(IM))

I0=IM+1

1 CONTINUE

RETURN

END

2. 子程序 SUBROUTINE SOLVE(N, NP, ID, A, B)

(1)哑元说明

N, NP, A, ID 同子程序 CHOLESKY\_DEC。

B 输入、输出参数, N 个元素的一维实数组。输入时存放方程组右端的 N 维列向量,输出时存放解向量。

(2)程序

SUBROUTINE SOLVE(N, NP, ID, A, B)

INTEGER N, NP

INTEGER ID(N)

REAL R

REAL (NP), B(N)

R=DOT\_PRODUCT(B, B)

IF(R==0.) THEN

B=0.

RETURN

END IF

I0=1

DO 1 I=1, N

IM=ID(I)

J=1

DO 2 KT=IM-1, I0, -1

B(I)=B(I)-A(KT)\*B(I-J)

J=J+1

2 CONTINUE

B(I)=B(I)/A(IM)

I0=IM+1

1 CONTINUE

IN=ID(N)

B(N)=B(N)/A(IN)

DO 3 I=N, 2, -1

NN=ID(I)-ID(I-1)-1

DO 4 J=1, NN

IJ=I-J

B(IJ)=B(IJ)-A(ID(I)-J)\*B(I)

4 CONTINUE

B(I-1)=B(I-1)/A(ID(I-1))

3 CONTINUE

RETURN

END

## References

- Chen X B. 1999. Direct iterative algorithm of the finite element[J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 21(2): 165-171.
- Cheng Z P. 2007. Electrical prospecting tutorial (in Chinese) [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press.
- Coggon J H. 1971. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method[J]. Geophysics, 36(1): 132-155.
- Dey A, Morrison H F. 1979. Resistivity modeling for arbitrarily shaped two dimensional structures [J]. Geophysical Prospecting, 27(1): 106-136.
- Huang J G. 2003. 3-D resistivity /IP modeling and inversion based on FEM (in Chinese) [D] [Ph. D. thesis]. Changsha: Central South University.
- Huang J G, Ruan B Y, Bao G S. 2003. Finite element method for IP modeling on 3-D geoelectric section [J]. Earth Science (in Chinese), 28(3): 323-326.
- Li Y G, Xu S Z, Liu B, *et al.* 1996. The finite element method for modeling 2-D MT field on a geoelectrical model with continuous variation of conductivity within each block [J]. Geological Journal of Universities (in Chinese), 2(4): 448-452.
- Liu D G, Fei J G, Yu Y J, *et al.* 1980. FORTRAN Algorithm Collection [Volume 1] (in Chinese) [M]. Beijing: National Defense Industry Press.
- Liu Y, Wang X B. 2012. The FEM for modeling 2-D MT with continuous variation of electric parameters within each block [J]. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 55(6): 2079-2086.
- Liu Y. 2012. Two-dimension numerical modeling for topography magnetotelluric/time-domain transient electromagnetic and direct inverse method (in Chinese) [D] [Ph. D. thesis]. Chengdu: Chengdu University of Technology.
- Lu Y Z, Ruan B Y. 2006. 3-D resistivity FEM numerical modeling based on tetrahedral element division under complicit terrain [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 21(4): 1302-1308.
- Lu Y Z. 2008. The research on 3-D fast forward and inversion of surface-borehole and borehole-surface IP methods (in Chinese) [D] [Ph. D. thesis]. Changsha: Central South University.
- Mallick K, Jain S C. 1979. Resistivity sounding on a layered transitional earth [J]. Geophysical Prospecting, 27(4): 869-875.
- Pan K J, Tang J T, Hu H L, *et al.* 2012. Extrapolation cascading multigrid method for 2.5D direct current resistivity modeling [J]. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 55(8): 2769-2778.
- Qiang J K. 2006. The research on 3-D resistivity forward and inversion algorithm on undulate topography (in Chinese) [D] [Ph. D. thesis]. Wuhan: China University of Geosciences.
- Ruan B Y, Xu S Z. 1998. FEM for modeling resistivity sounding on 2-D geoelectric modeling with line variation of conductivity within each block [J]. Earth Science (in Chinese), 23(3): 303-307.
- Ruan B Y, Xiong B. 2000. A Cholesky decomposition method for large-scale symmetrical system of equations with varying bandwidth [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 22(4): 361-368.
- Ruan B Y. 2001 a. 2-D electrical modeling due to a current point by FEM with variation of conductivity within each triangular element [J]. Guangxi Sciences (in Chinese), 8(1): 1-3.
- Ruan B Y. 2001 b. A generation method of the partial derivatives of the apparent resistivity with respect to the model resistivity parameter [J]. Geology and Prospecting (in Chinese), 37(6): 39-41.
- Song T. 2013. 2.5-D and 3-D DC resistivity numerical modeling using finite element method (in Chinese) [D] [Master's thesis]. Chengdu: Chengdu University of Technology.
- Xiong B, Ruan B Y. 2002. A Numerical Simulation of 2-D Geoelectric Section with Biquadratic Change of Potential for Resistivity Sounding by the Finite Element Method [J]. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 45(2): 285-295.
- Xu S Z. 1988. Selection of wave number k in Fourier inverse transformation for point source and 2-D electric field problems [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 10(3): 235-239.
- Xu S Z. 1994. FEM in Geophysics (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.
- Xu S Z, Yu T, Li Y G, *et al.* 1995. The finite element method for modeling 2-D MT field on a geoelectrical model with continuous variation of conductivity within each block [J]. Geological Journal of Universities (in Chinese), 1(2): 65-73.
- Zhou X X, Zhong B S. 1986. Numerical Modeling for Electrical Exploration (in Chinese) [M]. Chengdu: Sichuan Science and Technology Press.

## 附中文参考文献

- 陈小斌. 1999. 有限元直接迭代算法[J]. 物探化探计算技术, 21(2): 165-171.
- 程志平. 2007. 电法勘探教程[M]. 北京: 冶金工业出版社.
- 黄俊革. 2003. 三维电阻率/极化率有限元正演模拟与反演成像[D] [博士论文]. 长沙: 中南大学.
- 黄俊革, 阮百尧, 鲍光淑. 2003. 三维地电断面激发极化法有限元数值模拟[J]. 地球科学, 28(3): 323-326.
- 李予国, 徐世浙, 刘斌, 等. 1996. 电导率分块连续变化的二维 MT 有限元模拟(II) [J]. 高校地质学报, 2(4): 448-452.
- 刘德贵, 费景高, 于泳江, 等. 1980. FORTRAN 算法汇编(第一分册) [M]. 北京: 国防工业出版社.
- 刘云, 王绪本. 2012. 电性参数分块连续变化二维 MT 有限元数值模拟[J]. 地球物理学报, 55(6): 2079-2086.
- 刘云. 2012. 起伏地形大地电磁/时间域瞬变电磁二维数值模拟及直接反演法[D] [博士论文]. 成都: 成都理工大学.
- 吕玉增, 阮百尧. 2006. 复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限元数值模拟[J]. 地球物理学进展, 21(4): 1302-1308.
- 吕玉增. 2008. 地-井、井-地 IP 三维快速正反演研究[D] [博士论文]. 长沙: 中南大学.
- 潘克家, 汤井田, 胡宏伶, 等. 2012. 直流电阻率法 2.5 维正演的外推瀑布式多重网格法[J]. 地球物理学报, 55(8): 2769-2778.
- 强建科. 2006. 起伏地形三维电阻率正演模拟与反演成像研究[D] [博士论文]. 武汉: 中国地质大学.
- 阮百尧, 徐世浙. 1998. 电导率分块线性变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟[J]. 地球科学, 23(3): 303-307.
- 阮百尧, 熊彬. 2000. 大型对称变带宽方程组的 Cholesky 分解法 [J]. 物探化探计算技术, 22(4): 361-368.
- 阮百尧. 2001a. 三角单元部分电导率分块连续变化点源二维电场有限元数值模拟[J]. 广西科学, 8(1): 1-3.
- 阮百尧. 2001b. 视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵计算方法[J]. 地质与勘探. 37(6): 39-41.
- 宋滔. 2013. 2.5 维、三维直流电阻率法有限元数值模拟[D] [硕士论文]. 成都: 成都理工大学.
- 熊彬, 阮百尧. 2002. 电位双二次变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟[J]. 地球物理学报, 45(2): 285-295.
- 徐世浙. 1988. 点电源二维电场问题中付氏反变换的波数 k 的选择 [J]. 物探化探计算技术, 10(3): 235-239.
- 徐世浙. 1994. 地球物理中的有限单元法 [M]. 北京: 科学出版社.
- 徐世浙, 于涛, 李予国, 等. 1995. 电导率分块连续变化的二维 MT 有限元模拟(I) [J]. 高校地质学报, 1(2): 65-73.
- 周熙襄, 钟本善. 1986. 电法勘探数值模拟技术 [M]. 成都: 四川科学技术出版社.